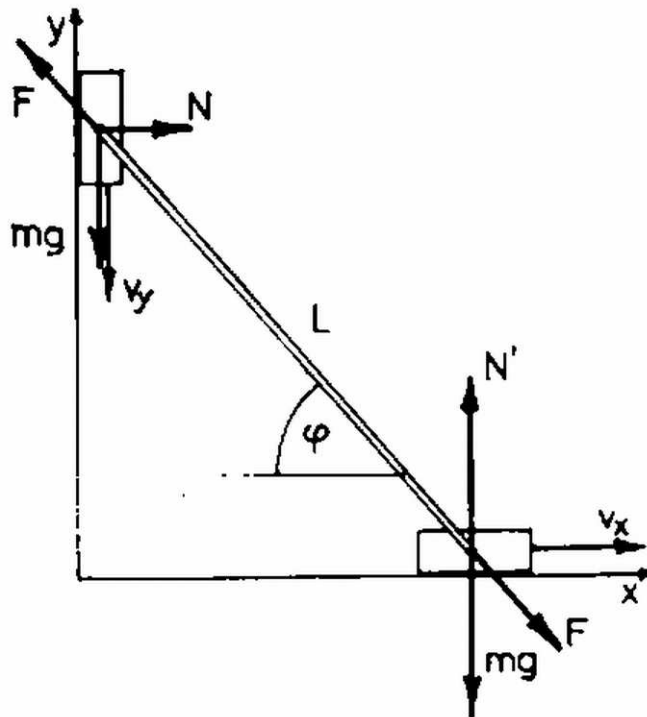


I. megoldás. A mozgás során a felső kiskocsi egyre kisebb erővel nyomja a falat, majd az elválás pillanatában N nullává válik (l. az ábrát).



Mivel a kiskocsi egészen eddig függőlegesen mozog, rá más vízszintes erő nem hathat, így meg kell, hogy szűnjék a rúdban ható erő is. Ennek megfelelően az elválás pillanatában a felső kiskocsi súlyereje hatására lefelé g gyorsulással mozog, az alsó kiskocsi pedig nem gyorsul, hiszen csak a rúderő vízszintes komponense gyorsíthatná vízszintesen. A kiskocsik sebessége és gyorsulása közötti összefüggéseket az

$$(1) \quad x^2 + y^2 = L^2$$

kényszerfeltételből határozhatjuk meg, ahol x , ill. y a kiskocsiknak a fal és a talaj metszéspontjától mért távolsága. Deriváljuk kétszer az idő szerint az (1) összefüggést, felhasználva a szorzat differenciálási szabályát. (Az idő szerinti deriváltat szokás szerint ponttal jelöljük.)

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0,$$

$$(2) \quad x\dot{x} + y\dot{y} = 0,$$

$$(3) \quad \dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y} = 0.$$

A bevezetőnek megfelelően a két kiskocsi gyorsulása az elválás pillanatában

$$(4) \quad \ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g.$$

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2$ a két kocsi sebességnégyzetének összege, az energiamegmaradás törvényéből határozható meg:

$$(1/2)m\dot{x}^2 + (1/2)m\dot{y}^2 = mg(L - y) = mgL(1 - \sin \varphi),$$

azaz

$$(5) \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2gL(1 - \sin \varphi).$$

(4)-et és (5)-öt (3)-ba helyettesítve, valamint $y = L \sin \varphi$ -t beírva

$$2gL(1 - \sin \varphi) - gL \sin \varphi = 0,$$

ahonnan

$$(6) \quad \sin \varphi = 2/3 \quad \varphi = 41^\circ 48'.$$

Az alsó kiskocsinak a faltól mért távolsága az elválás pillanatában

$$(6a) \quad x = L \cos \varphi = L \cdot \sqrt{5}/3.$$

Felhasználva, hogy (2) alapján a sebességek között az

$$(7) \quad \dot{x} = -\dot{y}(y/x) = -\dot{y} \operatorname{tg} \varphi$$

összefüggés áll fenn, a kiskocsi sebessége az elválás pillanatában (5)-ből meghatározható. Az alsó kiskocsi távolodik a faltól

$$(8) \quad \dot{x} = \sqrt{(8/27)gL}$$

sebességgel, a felső kiskocsi lefelé mozog

$$-\dot{y} = \sqrt{(10/27)gL}$$

sebességgel.

Takács László

II. megoldás. Az I. megoldás bevezetőjének megfelelően a felső kiskocsi elválásának pillanatában az alsó kiskocsi gyorsulása nulla, sebessége tehát ebben a helyzetben nem változik. Fejezzük ki az alsó kiskocsi sebességét a hely függvényében! A rúd pillanatnyi forgástengelyét a kiskocsi sebességére állított merőlegesek metszéspontja (P) adja. Az ábráról látható, hogy

$$(9) \quad v_y/x = v_x/y = \omega$$

a rúd szögsebessége. (v_x jobbra, v_y lefelé pozitív. Ugyanezt az összefüggést adta a (7) egyenlet is.) Az energiamegmaradás törvényéből

$$(1/2)mv_x^2 + (1/2)mv_y^2 = mgL - mgy,$$

(9)-et behelyettesítve és $x^2 = L^2 - y^2$ -et írva

$$(10) \quad v_x^2 = (2g/L^2)(L - y)y^2.$$

Mivel v_x nem változik a felső kiskocsi elválásának pillanatában, v_x^2 y szerinti differenciálhányadosa nulla:

$$(2g/L^2)(2yL - 3y^2) = 0,$$

ahonnan a fizikailag érdekes gyök

$$y = 2L/3.$$

Innen $x = \sqrt{L^2 - y^2} = L \cdot \sqrt{5}/3$, a sebességek. (9)–(10)-ből számíthatók.

Sárközi Imre (Tata, Eötvös J. Gimn., IV. o. t.)
dolgozata alapján