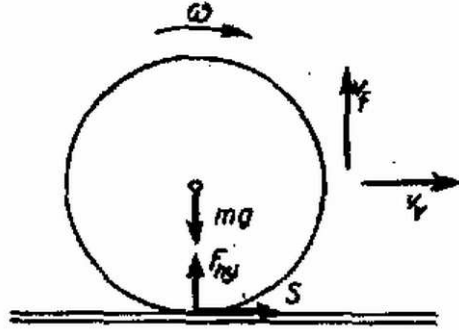


A pattogás során a golyó egyre nagyobb vízszintes sebességösszetevőhöz jut, miközben a forgó mozgás kerületi sebessége csökken. Ha a két sebesség kiegyenlítődik, vagyis $v_v = r\omega$, akkor ettől a pillanattól kezdve a golyó elméletileg a végtelenségig fog állandó vízszintes sebességösszetevővel és állandó szögsebességgel forogva pattogni. A mozgás függőleges összetevője periodikus: a h magasságból szabadon eső golyó tökéletesen rugalmasan ütközve visszapattan és h magasságig emelkedik, majd újra visszaesik stb.

Vizsgáljuk az n -edik ütközést! A golyó $v_f = -\sqrt{2gh} = -v_0$ lefelé mutató függőleges sebességösszetevővel érkezik a lapra, és $v'_f = v_0$ felfelé mutató függőleges sebességgel hagyja el azt, az ütközés során a függőleges impulzus-változás $2mv_0$. Erről tudjuk, hogy

$$(1) \quad 2mv_0 = (\overline{F}_{ny} - gm)\Delta t \approx \overline{F}_{ny}\Delta t$$



1. ábra

($\overline{F}_{ny}$ a lap és a golyó között fellépő nyomóerőnek az ütközés Δt idejére vett átlaga,

$$\overline{F}_{ny} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} F_{ny}(t) dt;$$

mivel az ütközés nagyon rövid ideig tart, az impulzusváltozás pedig véges nagyságú, F_{ny} -nak nagy értékek kell lennie, ezért mellette mg elhanyagolható.) A vízszintes impulzusváltozást a súrlódási erő hozza létre, feltéve hogy a golyó az egész Δt idő alatt „köszörül” $\overline{S} = \mu \overline{F}_{ny}$ és így

$$(2) \quad m(v_{v,n} - v_{v,n-1}) = \mu \cdot \overline{F}_{ny} \cdot \Delta t = \mu \cdot 2mv_0,$$

tehát

$$(3) \quad v_{v,n} = v_{v,n-1} + 2\mu v_0.$$

A súrlódási erő forgatónyomatéka a forgást fékezi:

$$(4) \quad \Theta(\omega_n - \omega_{n-1}) = -r\mu F_{ny}\Delta t = -r \cdot 2\mu mv_0,$$

így

$$(5) \quad \omega_n = \omega_{n-1} - \frac{5\mu v_0}{r}.$$

Itt felhasználtuk, hogy Θ a tömör gömbre $2mr^2/5$.

A (3) és (5) összefüggésekből a golyó n -edik ütközés utáni vízszintes sebessége és szögsebessége

$$(6) \quad v_{v,n} = n \cdot 2\mu v_0,$$

$$(7) \quad \omega = \omega_0 - n \frac{5\mu v_0}{r}.$$

Mindez akkor igaz, ha a golyó az n -edik ütközés teljes időtartama alatt köszörült, azaz

$$(8) \quad v_{v,n} \leq \omega_n r,$$

vagyis

$$(9) \quad n \cdot 2 \cdot \mu \cdot v_0 \leq \omega_0 r.$$

Mi történik, ha a (9) egyenlőtlenség $n-1$ -re még igaz, de n -re már nem áll fenn (n lehet 1 is)? Ekkor az n -edik ütközés alatt, abban a pillanatban amikor vízszintes sebesség és a forgásból adódó kerületi sebesség azonossá válik, megszűnik a köszörülés, megszűnik a súrlódás, a golyónak sem vízszintes sebességösszetevője, sem a szögsebessége nem változik tovább. Nyilván a további pattogások során sem változnak ezek a mennyiségek. Legyen az F_{ny} erő átlaga arra a Δt^* időre, amíg az n -edik ütközés során a köszörülés tart, F_{ny}^* és legyen a beálló szögsebesség és vízszintes sebességösszetevő rendre ω^* és v_r^* . Ekkor

$$(10) \quad m(v_r^* - v_{v,n-1}) = \mu F_{ny}^* \Delta t^*,$$

$$(11) \quad (2/5)mr^2(\omega^* - \omega_{n-1}) = -\mu F_{ny}^* \Delta t^*,$$

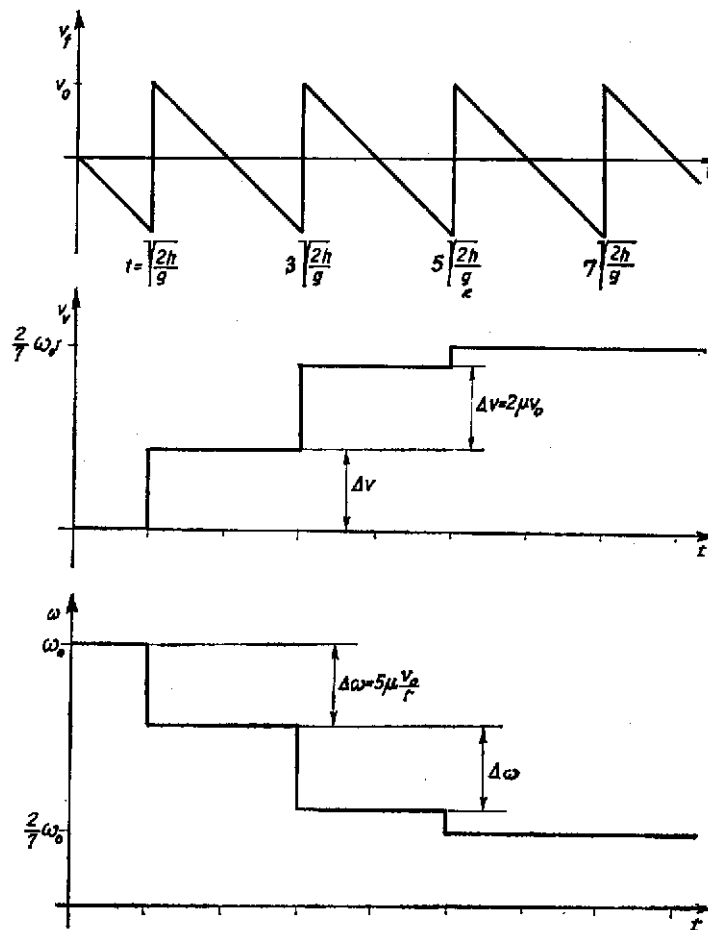
$$(12) \quad v_v^* = \omega^* \cdot r.$$

A (10), (11) és (12) egyenletrendszer megoldása (6) és (7) felhasználásával:

$$(13) \quad v_v^* = (2/7)\omega_0 \cdot r,$$

$$(14) \quad \omega^* = (2/7)\omega_0.$$

Tehát a golyó vízszintes irányú sebessége minden ütközés során $2\mu\sqrt{2gh}$ értékkel nő, míg a szögsebessége $5\mu\sqrt{2gh}/r$ értékkel csökken. Ez egészen addig tart, amíg a sebesség el nem éri a $2\omega_0 r/7$, a szögsebesség pedig a $2\omega_0/7$ értéket, az ezután következő pattanások során már sem a vízszintes sebesség, sem pedig a szögsebesség nem változik. A 2. ábra a golyó v_f függőleges, v_v vízszintes sebességét, valamint az ω szögsebességét ábrázolja az idő függvényében.



2. ábra