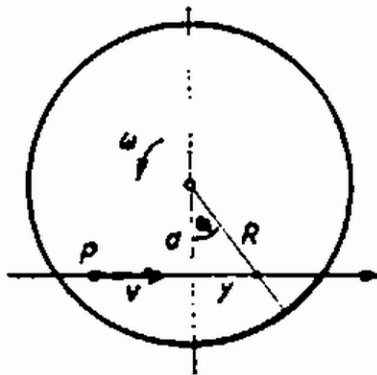


Rögzítsük a koordináta-rendszerünket a $v = 36 \text{ km/h}$ sebességgel haladó kerékpárhoz. Jelöljük P -vel azt a pontot, ahol a nyílvessző dőfi a kerék síkját (1. ábra).



1. ábra

A nyílvessző áthaladása során a P pont a földhöz képest nyugalomban van, tehát koordináta-rendszerünkben v sebességgel mozog. Feltesszük, hogy a kilövés helye nincs a kerék síkjában, hiszen ekkor a nyílvessző nem tudna áthaladni a küllők közt. Ha a nyílvessző sebessége u , akkor az áthaladás ideje $T = 10 \text{ cm/u}$ függetlenül attól, hogy milyen irányból lőtték ki, ha a kerék szélessége elhanyagolható a nyílvessző hosszához képest. Azt keressük, hogy mekkora a minimális u . Ez ugyanaz, mintha azt keresnénk, mekkora a minimális T . A feladatot a következőképpen fogalmazhatjuk meg. Egy álló középpontú, v ;kerületi sebességgel forgó küllős kerék belsejében kell egy v sebességű P pontnak mozognia a lehető leghosszabb ideig úgy, hogy ne messe sem a küllőket, sem a kerék kerületét. A kerék felső felében nem érdemes a megoldást keresnünk, mert a küllők és a P pont szembe mozognak, így hamarabb találkoznak, mint hasonló helyzetben a kerék alsó felén, ahol egy irányban mozognak. Az egyenesnek, amelyen a P pont mozog: a kerék középpontjától mért távolságát jelöljük a -val. Vizsgáljuk most meg, hogy a P pont előtt levő küllő és az egyenes metszéspontja hogyan mozog az egyenesen:

$$y_1 = a \operatorname{tg} \alpha = a \operatorname{tg} \omega t.$$

Ugyanígy felírhatjuk az egyenletet arra a küllőre is, amely 10° -kal hátrább van:

$$y_2 = a \operatorname{tg}[\omega t - (\pi/18)].$$

Egyszerűen felírhatjuk a P pont mozgását is:

$$y_3 = vt + k = R\omega t + k,$$

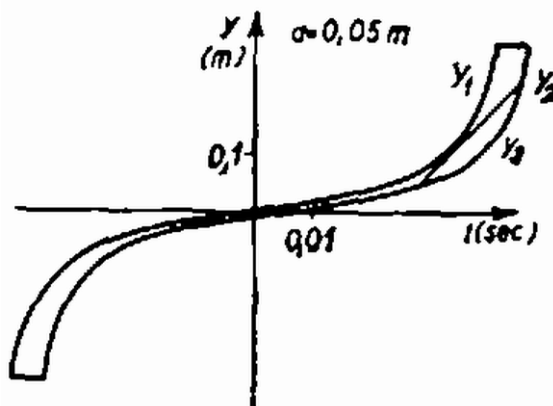
ahol k jelenti azt, hogy a nulladik időpillanatban hol helyezkedik el a P pont. Figyelembe kell vennünk a kerék kerülete szabta határt is. A Pitagorasz-tételt használva:

$$y^2 \leq R^2 - a^2.$$

Az alatt a T idő alatt, amíg a nyílvessző áthalad a keréken, a következő feltételeknek kell teljesülniük:

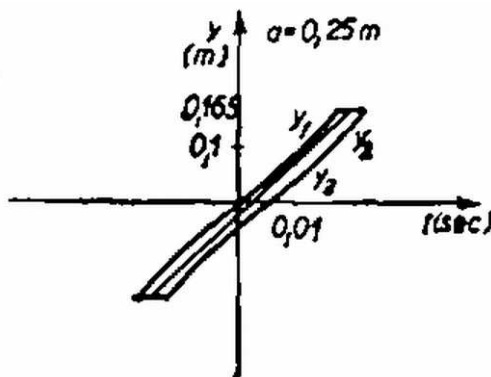
$$y_2 \leq y_3 \leq y_1 \quad \text{és} \quad |y_i| \leq \sqrt{R^2 - a^2} \quad i = 1, 2, 3.$$

Az y_i függvényeket ($i = 1, 2, 3$) ábrázolva a következőképpen fogalmazhatjuk meg ismét a feladatot. Milyen a , k paraméterek mellett lesz az y_1 és y_2 görbékkel, valamint az $y = \pm \sqrt{R^2 - a^2}$ egyenesekkel határolt területnek a leghosszabb metszete az y_3 egyenessel. Ha a kicsi, akkor a tartomány erősen görbül, ezért csak rövid $v = R, \omega$ meredekségű szakasz húzható bele (1. a 2. ábrát).



2. ábra

Ha pedig a nagy, akkor a tartományba eső v meredekségű szakasz hosszát az egymástól egyre kisebb távolságra levő határoló egyenesek határozzák meg, a tangens görbét még csak érintenie sem kell (1. a 3. ábrát).



3. ábra

Leghosszabb tehát akkor lesz a szakasz, ha úgy húzható meg, hogy éppen mindkét tangens görbét érintse.

Jelöljük ennek az egyenletét y_3^* -gal. A t tengelyt az y_2 görbe a $\Delta t = \frac{\pi/18}{\omega}$ pontban metszi. A szimmetria miatt az y_3^* egyenes az időtengelyt $\Delta t/2$ -ben, azaz $\pi/(36\omega)$ -ban metszi, azaz

$$0 = R\omega(\Delta t/2) + k. \quad \text{Ebből} \quad k = \frac{R\pi}{36}, \quad \text{tehát} \quad y_3 = R\left(\omega t - \frac{\pi}{36}\right).$$

Deriváljuk y_1 -et t szerint: $y_1 = \frac{a\omega}{\cos^2 \omega t}$ Az érintési pontban az y_1 görbe meredeksége is $R\omega$ lesz. Ezért ha az érintési ponthoz tartozó időt t^* -gal jelöljük:

$$(1) \quad \frac{a\omega}{\cos^2 \omega t^*} = R\omega.$$

Az érintés miatt a t^* időpontban $y_1 = y_3^*$, tehát

$$a \operatorname{tg} \omega t^* = R\left(\omega t^* - \frac{\pi}{36}\right).$$

Az (1) és (2) egyenletekből a -t kiküszöbölve:

$$R \cos^2 \omega t^* \operatorname{tg} \omega t^* = R[\omega t^* - (\pi/36)],$$

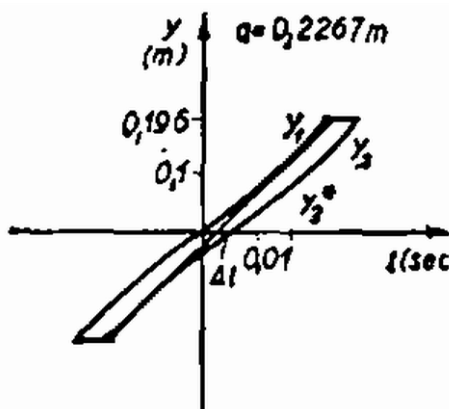
átalakítva

$$2 \cos \omega t^* \sin \omega t^* = 2[\omega t^* - (\pi/36)],$$

azaz

$$\sin 2\omega t^* - 2\omega t^* + (\pi/18) = 0.$$

Ezt az egyenletet pl. próbálgatással megoldva azt kapjuk, hogy $t^* = 0,0155$ s (1) felhasználásával $a = 0,22674$. A görbéket felrajzolva a 4. ábrán láthatjuk, hogy az optimális szakasz az $y = \pm \sqrt{R^2 - a^2}$ egyeneseket eléri, tehát a P pont által megtett út $s = 2\sqrt{R^2 - a^2} = 0,392$ m.



4. ábra

Felhasználva, hogy $T = \frac{s}{v} = \frac{0,392 \text{ m}}{10 \text{ m/s}} = 0,0392 \text{ s}$, $u = 10 \text{ cm}/T = 2,55 \text{ m/s}$.

A 4. ábráról azt is leolvashatjuk, hogy P pont közvetlenül a kerék kerületét érintve indul, ezután a mögötte levő küllő utoléri, megérinti, majd lemarad, ezután a P pont éri utol az előtte levő küllőt, megérinti, majd lemarad mögötte, végül a kerék kerületét ismét elérve fejezi be a mozgást.

Tehát a nyílvessző minimális sebessége $2,55 \text{ m/s}$ és a kerék tengelyétől $a = 22,6 \text{ cm}$ -rel lejjebb kell belőni közvetlenül a kerék kerülete mellett, és mindegy, hogy milyen irányból lőjük be.

Lugosi Erzsébet

Megjegyzés. A hibás dolgozatok oka többnyire az volt, hogy a megoldók nem vették figyelembe, hogy a nyílvessző dőfspontja (P pont) mozog a kerékhez képest, azaz az 510. számú gyakorlatot oldották meg.