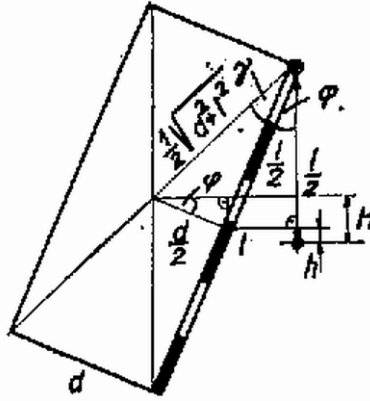


A csapó lécc elengedése után helyzeti energiája forgási energiává alakul át. A lécc tömegközéppontjának süllyedése: $(l/2) - (l/2) \cos \alpha$ (l. az ábrát).



Felírhatjuk tehát, hogy

$$mg(l/2)(1 - \cos \alpha) = (1/2)\Theta_m\omega_1^2,$$

ahol $\Theta_m = (1/3)ml^2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$ a lécc tehetetlenségi nyomatéka, és ω_1 a szögsebessége az ütközés pillanatában. A fentiekből megkapjuk ω_1 -et:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g(1 - \cos \alpha)}{l}} = 7 \frac{1}{\text{s}}.$$

Most számítsuk ki a téglalap alakú lemeznek a felfüggesztési pontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát. A függvény táblázatban megtalálható a tömegközéppontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték: $(1/12)M(l^2 + d^2)$. A tömegközéppont és a felfüggesztés távolsága $\sqrt{d^2 + l^2}/2$. A Steiner-tételt használva:

$$\Theta_m = \frac{1}{12}M(l^2 + d^2) + M\frac{d^2 + l^2}{4} = \frac{1}{3}M(d^2 + l^2) = 1,66 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2.$$

Vizsgáljuk először az *a)* esetet, amikor az ütközés teljesen rugalmas. Ekkor felírhatjuk az ütközésre a forgásmennyiség és az energia megmaradására vonatkozó egyenleteket. Jelölje ω_m , ill. ω_M a testek ütközés utáni szögsebességét. Így

$$\begin{aligned} \omega_1\Theta_m &= \omega_m\Theta_m + \omega_M\Theta_M, \\ (1/2)\Theta_m\omega_1^2 &= (1/2)\Theta_m\omega_m^2 + (1/2)\Theta_M\omega_M^2. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \omega_m &= \frac{\omega_1(\Theta_m - \Theta_M)}{\Theta_m + \Theta_M} = -4,86 \frac{1}{\text{s}}; \\ \omega_M &= \frac{2\Theta_m\omega_1}{\Theta_m + \Theta_M} = 2,14 \frac{1}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Ismét az energiamegmaradást felhasználva, kapjuk a lécc, illetve a lemez emelkedési magasságát:

$$mgh = (1/2)\Theta_m\omega_m^2, \quad MgH = (1/2)\Theta_M\omega_M^2,$$

amiből

$$h = \frac{l^2}{6g}\omega_m^2 = 3,61 \cdot 10^{-2} \text{ m}; \quad H = \frac{l^2 + d^2}{6g}\omega_m^2 = 7,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

b) Most vizsgáljuk a rugalmatlan ütközés esetét. Jelöljük ω_2 vel az ütközés utáni közös szögsebességet. Most csak a forgásmennyiség megmaradására vonatkozó egyenletet írhatjuk fel:

$$\omega_1\Theta_m = \omega_2(\Theta_m + \Theta_M), \quad \omega_2 = \frac{\omega_1\Theta_m}{\Theta_m + \Theta_M} = 1,072 \text{ 1/s}.$$

Az ütközés utáni pillanatban a mozgási energia $E = (1/2)(\Theta_m + \Theta_M)\omega_2^2 = 1,13 \cdot 10^{-2}$ J.

Most vizsgáljuk meg, hogy együtt mozog-e a két test az ütközés után.

Nézzük meg, mekkora lenne a testek szöggyorsulása φ szögű elfordulás után, ha külön-külön mozognának!

A pálcára ható forgatónyomaték: $mg(l/2) \sin \varphi$ (l. az ábrát). A szöggyorsulása:

$$\beta_m = \frac{mg(l/2) \sin \varphi}{\Theta_m} = \frac{3g \sin \varphi}{2l}.$$

A lemezre ható forgónyomaték $Mg \frac{\sqrt{l^2 + d^2}}{2} \sin(\varphi + y)$, valamint $\sin y = \frac{d}{\sqrt{l^2 + d^2}}$ és $\cos y = \frac{l}{\sqrt{l^2 + d^2}}$.

Tehát a szöggyorsulás:

$$\beta_M = \frac{Mg(\sqrt{l^2 + d^2}/2) \sin(\varphi + y)}{\Theta_M} = \frac{3g(l \sin \varphi + d \cos \varphi)}{2(l^2 + d^2)}.$$

Osszuk el őket egymással, hogy összehasonlítsuk őket. Az egyszerűsítések után:

$$\frac{\beta_M}{\beta_m} = \frac{l^2 + dl \operatorname{ctg} \varphi}{l^2 + d^2}.$$

Látható, hogy ez nagyobb egynél, ha $l \operatorname{ctg} \varphi > d$, azaz $\operatorname{ctg} \varphi > \operatorname{tg} y$. Tehát $\beta_M > \beta_m$, ha $\varphi < 90^\circ - y$, azaz $\varphi < 71^\circ 34'$. Ha a két test együtt indul az alsó helyzetből, akkor mindaddig egymáshoz nyomódnak, amíg a pálca előbb kiszámított lassulása kisebb a lemezénél, tehát $71^\circ 34'$ kitérésig együtt mozognak. A pálcát 60° -os szögből indítottuk, így nem lehetséges, hogy a két test az ütközés után ennél jobban kitérjen, tehát a rugalmatlan ütközés után a maximális kitérésig együtt fognak mozogni.

φ szögű kitérés esetén a pálca tömegközéppontjának emelkedése $h = (l/2)(1 - \cos \varphi)$. A lemezé pedig $H = h + (d/2) \sin \varphi$. A két egyenletből φ -t kiküszöbölve kapjuk:

$$H = h + d\sqrt{(h/l) - (h^2/l^2)}.$$

Az energiamegmaradás törvénye szerint $mgh + MgH = E$.

E két egyenletből álló egyenletrendszert megoldva h -ra egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$h^2[g^2(m + M)^2 + M^2g^2d^2l^{-2}] - h[2Eg(m + M) + M^2g^2d^2l^{-1}] + E^2 = 0.$$

Megoldva és adatainkat behelyettesítve kapjuk, hogy

$$h = 1,37 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad \text{és} \quad H = 2,28 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

Szállási Zoltán (Esztergom, Dobó K. Gimn., III. o. t.)
dolgozata alapján.