

I. megoldás. A pálya mentén kitett test és az űrhajó mozgása jó közelítéssel felfogható úgy, hogy mindketten azonos pályán mozognak, és erre a mozgásukra szuperponálódva a kölcsönös vonzás hatására egymás felé esnek. Célszerű a relatív mozgásukat a közös súlyponthoz rögzített koordináta-rendszerből vizsgálni. Ebben a koordináta-rendszerben a M tömegű űrhajó nyugvónak tekinthető, hiszen az űrhajó sebessége m/M -szer kisebb, mint a m tömegű kitett tárgy. Feladatunk tehát az, hogy meghatározzuk, mennyi idő alatt esik rá az $R = 19$ m sugarú űrhajóra a falától $h = 3$ m távolságra levő tárgy. A tárgy gyorsulása az esés közben állandóan változik, célszerű ezért a becsapódás helyét a következő módon meghatározni. Az energiamegmaradás szerint a tárgy sebessége és a faltól való x távolság között az

$$(1) \quad \frac{1}{2}mv^2 = \gamma mM \left(\frac{1}{R+x} - \frac{1}{R+h} \right)$$

összefüggés áll fenn, azaz

$$(2) \quad v = \sqrt{2\gamma M \left(\frac{1}{R+x} - \frac{1}{R+h} \right)}.$$

Ezt a sebességet állandónak véve, amíg az x ($x - \Delta x$)-re csökken, azt találjuk, hogy a faltól x távolságra levő kicsiny Δx hosszúságú szakasz megtételéhez

$$(3) \quad \Delta t = \frac{\Delta x}{\left[2M\gamma \left(\frac{1}{R+x} - \frac{1}{R+h} \right) \right]^{1/2}}$$

idő szükséges.

Bontsuk fel a $(0, h)$ intervallumot az x_i osztópontok segítségével kicsiny, Δx_i hosszúságú részekre ($i = 1, 2, \dots, n$), így (3) alapján azt kapjuk, hogy a teljes h távolság befutásához szükséges idő közelítőleg

$$\sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i}{\left[2M\gamma \left(\frac{1}{R+x_i} - \frac{1}{R+h} \right) \right]^{1/2}}.$$

A $(0, h)$ intervallum felosztását minden határon túl finomítva, a fenti összeg határértéke az

$$(4) \quad \int_0^h \frac{dx}{(2\gamma M)^{1/2} \left(\frac{1}{R+x} - \frac{1}{R+h} \right)^{1/2}}$$

integrál, ami pontosan megadja a h távolság megtételéhez szükséges t időt.

Bár az integrál kiszámítható, t nagyságának megbecsüléséhez elegendő, ha a

$$(5) \quad t \approx \frac{h}{v_{\text{át1}}}$$

kifejezést használjuk, ahol $v_{\text{át1}}$ átlagsebességének a kezdeti 0 és a végső

$$v = \sqrt{2\gamma M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right)} = 1,64 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

számtani közepét vesszük. Így

$$(7) \quad t \approx \frac{2h}{\sqrt{2M\gamma \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right)}} = 10,2 \text{ óra}$$

adódik. (A pontos érték

$$t = (2\gamma M)^{-1/2} \left\{ [hR(R+h)]^{1/2} + (R+h)^{3/2} \arctg \sqrt{h/R} \right\} = 10,7 \text{ óra}.$$

Ez alatt az idő alatt az űrhajó kereken 6000 km-t tesz meg.

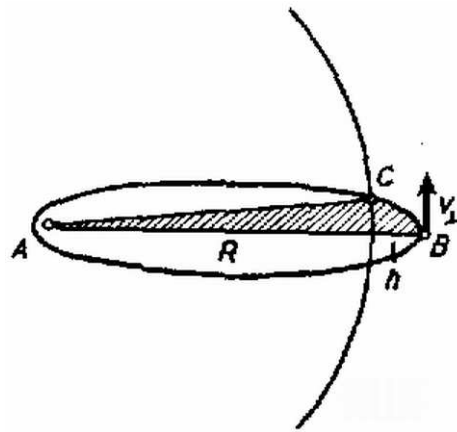
Amikor a „kitett tárgy” egy űrhajós, aki pisztolyából igen rövid idő alatt m_g tömegű v_g sebességű gázt lő ki, tömege m_g -vel csökken, de $m_g v_g$ nagyságú impulzusra, azaz

$$(8) \quad v = \frac{m_g v_g}{m - m_g} = 0,5 \text{ m/s}$$

sebességre tesz szert. Ez a sebesség lényegesen nagyobb, mint az, amelyre a gravitáció gyorsítaná, tehát emellett a v mellett a vonzás miatt fellépő sebességnövekedés elhanyagolható. Ezzel a sebességgel a $h = 3 \text{ m}$ utat 6 s alatt teszi meg az űrhajós. Eközben az űrhajó $9,75 \text{ km}$ -t tesz meg.

Fehér Péter (Budapest, Kaffka M. Gimn. III. o. t.)

II. megoldás. A kitett test becsapódásának az idejét meghatározhatjuk a Kepler-törvények segítségével is. Képzeld el, hogy a kitett testet egy igen kicsiny, a két test középpontját összekötő egyenesre (AB) merőleges $v_\perp$ sebességgel indítjuk! Ekkor a pálya egy nagyon elnyújtott ellipszis lesz, amely a $v_\perp \rightarrow 0$ határesetben rázsugorodik az $\overline{AB}$ szakaszra (l. az 1. ábrát).



1. ábra

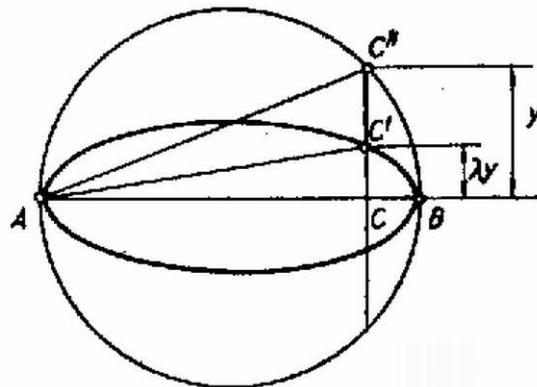
Kepler II. törvénye értelmében a $\overline{BC}$ szakasz befutásához szükséges idő (t) és a teljes keringési idő (T) aránya megegyezik a vezérsugar által sűrt felület (F_{ABC}) és az ellipszis teljes területének (F_{ell}) arányával:

$$(9) \quad \frac{t}{T} = \frac{F_{ABC}}{F_{\text{ell}}}.$$

$v_\perp \rightarrow 0$ esetén (9) bal és jobb oldalának határértéke egyenlő. Ebben a határesetben t éppen az általunk meghatározni kívánt becsapódási idő, T pedig az $R + h$ nagytengelyű ellipszisen való keringési idő:

$$(10) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{R+h}{2}\right)^3}{\gamma M}}.$$

Kérdés azonban, mi a jobb oldal határértéke $v_\perp \rightarrow 0$ esetén. Ezt a határértéket az ellipszisek következő tulajdonsága alapján kaphatjuk meg: minden $2a$ nagytengelyű ellipszis előállítható úgy, hogy egy a sugarú kört az egyik átmérőjére merőlegesen megadott arányban zsugorítunk (2. ábra).



2. ábra

Ezen zsugorítás közben (mivel csak egy lineáris méretet változtatunk) a területek ugyanilyen arányban változnak:

$$(11) \quad F_{\text{ell}} = \lambda F_{\text{kör}}$$

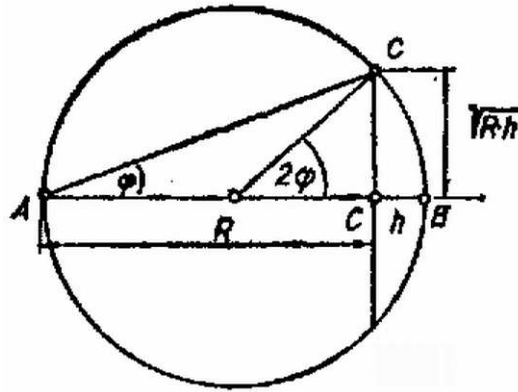
$$(12) \quad F_{ABC'} = F_{ABC''}.$$

(11) és (12)-ből osztással kapjuk, hogy

$$(13) \quad \frac{F_{ABC'}}{F_{\text{ell}}} = \frac{F_{ABC''}}{F_{\text{kör}}}$$

λ -tól függetlenül, tehát a $\lambda \rightarrow 0$ esetben is. Így

$$(14) \quad \frac{t}{T} = \frac{F_{ABC''}}{F_{\text{kör}}}$$



3. ábra

(14) jobb oldalát a 3. ábra segítségével könnyen meghatározhatjuk:

$$(15) \quad \varphi = \arctg \sqrt{h/R},$$

$$(16) \quad F_{ABC''} = \frac{1}{2} \frac{R+h}{2} \sqrt{Rh} + \frac{2\varphi}{2\pi} \pi \left(\frac{R+h}{2} \right)^2,$$

$$(17) \quad F_{\text{kör}} = \pi \left(\frac{R+h}{2} \right)^2,$$

és így

$$(18) \quad t = \frac{[hR(R+h)]^{1/2} + (R+h)^{3/2} \arctg \sqrt{h/R}}{(2\gamma M)^{1/2}}$$

Kuna János (Törökszentmiklós, Bercsényi M. Gimn., III. o. t.)
dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Megoldásunk során úgy vettük, hogy az űrhajó a közös súlyponthoz rögzített koordináta-rendszerben áll. Ha figyelembe vesszük, hogy a tömegvonzás őt is gyorsítja, képleteinkben mindenütt M helyébe $M + m$ kerül.

2. Feladatunk megoldásakor lényegesen kihasználtuk, hogy a tárgyat az űrhajó pályája mentén (elé vagy mögé) rakták ki. Ebben és csakis ebben az esetben fogadható el az a közelítés, hogy az űrhajót és a testet pályán tartó Föld hatását nem vesszük figyelembe. Ennek szemléltetésére vizsgáljuk meg, mi történik, ha a testet pl. az űrhajó és a Föld közé tesszük ki! A feladatban megadott sebesség $r = \frac{\gamma M_{\text{föld}}}{v^2} = 1,57 \cdot 10^8$ m sugarú körpályának felel meg. Tegyük fel, hogy a tárgyat úgy helyezzük ki az $r - d$ ($d = 22$ m) sugarú pályára, hogy a sebessége az új pályasugárnak megfelelő $v' \cong v + dv^3/(\gamma M_{\text{föld}})$ legyen. Ha az űrhajó és a kitett test nem vonzanak egymást, a két test koncentrikus pályán haladna, de a kitett test a saját pályáján $dv^3/(\gamma M_{\text{föld}}) \cong 2,4 \cdot 10^{-4}$ m/s sebességgel gyorsabban futna. Erre a mozgásra szuperponálódik a kölcsönös vonzás hatása. Mivel az ebből eredő sebesség azonos nagyságrendű a két test

sebességkülönbségével, azt látjuk, hogy a test – miközben közeledik az űrhajóhoz – egy kicsit (nem elhanyagolható mértékben!) előre is szalad, és az űrhajó felületét nem három méter befutása után éri el.

Más típusú probléma merül fel, ha azt feltételezzük, hogy a kitett test és az űrhajó sebessége az indításkor teljesen azonos. A kisebb sugáron a körpályán maradáshoz szükséges sebesség nagyobb ($v' > v$), mint amivel a test rendelkezik, így az űrhajó vonzása nélkül a kitett test közeledne a Földhöz, azaz távolodna az űrhajótól. Megvizsgálva a fellépő gyorsulások nagyságrendjét [az űrhajó Föld felé mutató (centripetális) gyorsulásánál a kis test gyorsulása $\frac{2\gamma Md}{r^3} = 4 \cdot 6 \cdot 10^{-9} \text{ m/s}^2$ értékkel nagyobb], azt találjuk, hogy még az űrhajó vonzása sem elegendő ahhoz, hogy az űrhajó és a kitett test távolodását megakadályozza.

A 2. megjegyzés jól mutatja, hogy milyen gondosan kell eljárunk, amikor több test egymás gravitációs terében való mozgását vizsgáljuk. Ezért találtuk érdemesnek a probléma részletes tárgyalását közölni, ezt egy külön cikkben találja meg az érdeklődő olvasó (l. a 225. oldalt).