



a) A mennyezetről lelógó test impulzusa kezdetben nulla, és egy golyó belövése $m_1 v_1$ -gyel növeli a rendszer impulzusát. Így n golyócska belelövése után az impulzus $n(m_1 v_1)$ lesz. A test sebességét jelöljük ekkor u_n -nel. Felírhatjuk az impulzusmegmaradást:

$$u_n = \frac{n(m_1 v_1)}{m_2 + nm_1} = \frac{m_1 v_1}{(m_2/n) + m_1}$$

Láthatjuk, hogy ez a függvény szigorúan monoton növekedő, így a maximális sebességet $n \rightarrow \infty$ esetben kapjuk meg: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = v_1 = 15$ m/s. Az inga lengésére írjuk fel a mechanikai energia megmaradását (az n -edik golyócska belövése után)

$$(1/2)(m_2 + nm_1)u_n^2 = (m_2 + nm_1)gh,$$

ahol h az inga legnagyobb magassága;

$$h = u_n^2/2g, \quad \text{tehát} \quad h_{max} = v_1^2/2g = 11,25 \text{ m.}$$

Tebát az inga legfeljebb 11,25 m magasra emelkedhet.

b) Az n -edik golyó belövése után a rendszerrel összesen $E_1 = nm_1 v_1^2/2$ energiát közöltünk. Az ütközés utáni pillanatban helyzeti energiája még nincs, így összes mechanikai energiája a mozgási energia:

$$E_2 = \frac{(m_2 + nm_1)u_n^2}{2}.$$

A két energia különbsége fordítódott arra, hogy a rendszer hőmérsékletét emelje. Az ismert összefüggés alapján a hőmérsékletemelkedés:

$$\Delta T_n = \frac{Q}{c(m_2 + nm_1)} = \frac{E_1 - E_2}{c(m_2 + nm_1)}.$$

Egyszerűsítések után:

$$\Delta T_n = \frac{nm_1 m_2 v_1^2}{2c(m_2 + nm_1)^2} = \frac{m_1 m_2 v_1^2}{2c} \cdot \frac{1}{\frac{(m_2 + nm_1)^2}{n}}.$$

A ΔT ott maximális, ahol a

$$\frac{(m_2 + nm_1)^2}{n} = \frac{m_2^2}{n} + 2m_1 m_2 + nm_1^2$$

kifejezésnek minimuma van. A számtani és mértani közép-re vonatkozó összefüggést felhasználva írhatjuk, hogy

$$\frac{m_2^2}{n} + nm_1^2 \geq 2m_1 m_2.$$

A bal oldatnak tehát n függvényében minimuma akkor van, ha az egyenlőség teljesül, azaz

$$\frac{m_2^2}{n} = nm_1^2.$$

amiből

$$n = \frac{m_2}{m_1} = 24.$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\Delta T_{max} = \Delta T_{24} = 0,035 \text{ K.}$$