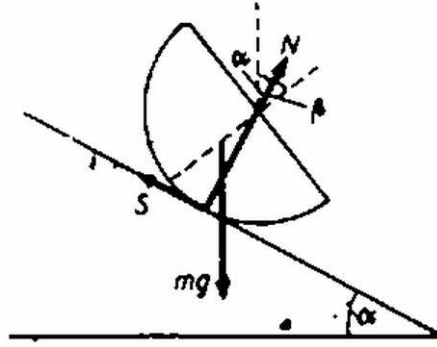




A félgömb nem csúszik meg a lejtőn, ha a rá ható erők eredője nulla. A lejtő nyomóereje (N) és a súrlódási erő (S) az ábra alapján:

$$(1) \quad S = mg \sin \alpha,$$

$$(2) \quad N = mg \cos \alpha.$$

A tapadás $S \leq \mu N$ feltételébe beírva a szokásos

$$(3) \quad \mu \geq \tan \alpha$$

feltétel adódik.

Vizsgáljuk meg most azt az esetet, amikor $\mu \leq \tan \alpha$ és a félgömb tisztán csúszik! Ekkora félgömb a lejtővel párhuzamos gyorsulással mozog, szimmetriatengelyének a lejtőre bocsátott merőlegessel bezárt β szöge állandó. Írjuk fel Newton II. törvényét a lejtővel párhuzamos és az arra merőleges összetevőkre:

$$(4) \quad mg \sin \alpha - S = ma,$$

$$(5) \quad mg \cos \alpha - N = 0,$$

ahol a csúszás miatt

$$(6) \quad S = \mu N.$$

A félgömb nem forog, tehát a rá ható forgatónyomatékok eredője nulla. Vigyáznunk kell azonban, hogy melyik pontra írjuk fel a nyomatéki egyenletet! Mivel a félgömb nincs nyugalomban, nem igaz az a sztatikában érvényes állítás, hogy a vonatkoztatási pont tetszőleges. A dinamika törvényei szerint kell eljárunk, tehát a mozgást a tömegközéppont haladó mozgására és a tömegközéppont körüli forgásra kell bontanunk. A nyomatéki egyenlet tehát

$$(7) \quad Nd \sin \beta = S(R - d \cos \beta),$$

ahol $d = (3/8)R$ a tömegközéppontnak a gömb középpontjától mért távolsága. A (4)–(7) egyenletrendszer másodfokú egyenletre vezet, melynek megoldása:

$$(8) \quad \cos \beta = \frac{8\mu^2 \pm \sqrt{9 - 55\mu^2}}{3(1 + \mu^2)}.$$

A diszkrimináns nem lehet negatív, innen $\mu \leq 3/\sqrt{55}$. Ha ez a feltétel nem teljesül, a félgömb sík lapjára fordul. Könnyen belátható, hogy μ megfelelő értékeinél $|\cos \beta| \leq 1$ adódik.

Ha a félgömböt egy súlytalan másik félgömbbel teljes gömbbé egészíthetjük ki, amelynek súlypontja középpontjától d távolságra van, β mindkét értékének fizikai érteleme tulajdonítható: a pozitív előjelhez tartozó megoldás stabil, a negatív instabil helyzetnek felel meg. Félgömb esetében $\beta \leq 90^\circ$, különben a félgömb sík lapjára billen. $\cos \beta$ akkor lesz a negatív előjelet véve is pozitív, ha $8\mu^2 \geq \sqrt{9 - 55\mu^2}$, ahonnan $\mu \geq 3/8$.

Összefoglalva, ha $\mu \leq \tan \alpha$ és így a félgömb csúszik, szimmetriatengelyének a függőlegessel bezárt szöge

$$(9) \quad \alpha + \beta = \alpha + \arccos \frac{8\mu^2 \pm \sqrt{9 - 55\mu^2}}{3(1 + \mu^2)}$$

Ha $0 < \mu \leq 3/8$, csak a pozitív előjelet véve kapunk megoldást, ez stabil egyensúlyi helyzetnek felel meg. $3/8 < \mu < 3/\sqrt{55}$ esetén a negatív előjelnek megfelelő instabil egyensúlyi helyzet is megjelenik. μ növelésével a két gyök közeledik egymáshoz, $\mu = 3/\sqrt{55}$ esetén egyenlővé válik. Ennél nagyobb súrlódási együtthatók (és $\tan \alpha \geq \mu$ miatt nagyobb hajlásszögű lejtők) esetén a félgömb mindenképpen sík lapjára fordul.