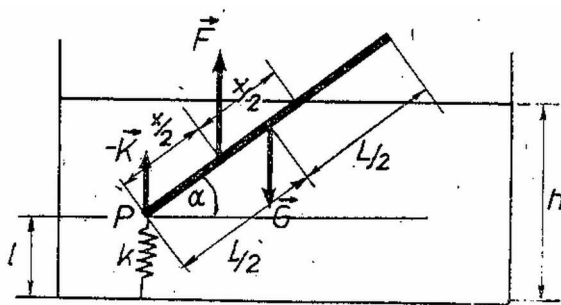


Jellemezzük a rúd helyzetét a vízszintessel bezárt α szöggel és azon végpontjának az edény aljából való távolságával (l), amihez a rugót erősítettük.

- a) $h \leq l_0 = 30$ cm esetén a rugalmast szál laza, a rúd úszik a felszínen, tehát $\alpha = 0$ és $l = h$.
- b) $h > l_0$ a rugó már feszes, és a rúd x hosszúságú darabja a víz alatt van. A rúdra ható $G = AL\rho g$ nagyságú súlyerőt, az $F = Ax\rho_v g$ nagyságú felhajtóerőt, valamint a $K = k(l - l_0)$ nagyságú rugóerőt és ezek támadáspontját az 1. ábra szemlélteti.



1. ábra

Mivel $\mathbf{G}$ és $\mathbf{F}$ hatásvonalára függőleges, az egyensúly szükséges feltétele hogy $\mathbf{K}$ hatásvonalára is ilyen irányú legyen. A $\Sigma \mathbf{F} = 0$ és a $\Sigma \mathbf{M} = 0$ egyensúlyi feltételek (az utóbbi a P pontra) felírva:

$$(1) \quad G + K - F = AL\rho g + k(l - l_0) - Ax\rho_v g = 0,$$

$$(2) \quad F(x/2) \cos \alpha - G(L/2) \cos \alpha = (x^2/2)A\rho_v g \cos \alpha - (L^2/2)A\rho g \cos \alpha = 0.$$

Ezenkívül az ábráról leolvasható, hogy

$$(3) \quad l + x \sin \alpha = h.$$

Tegyük fel egyelőre, hogy $\cos \alpha \neq 0$, ekkor a fenti egyenletrendszer megoldása:

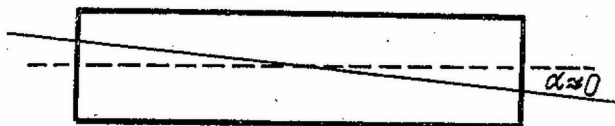
$$(4a) \quad x = L\sqrt{\rho/\rho_v} = 77,5 \text{ cm},$$

$$(4b) \quad l = l_0 + \frac{AL\rho g}{k} \left(\sqrt{\frac{\rho_v}{\rho}} - 1 \right) = 31,8 \text{ cm}$$

$$(4c) \quad \sin \alpha = \frac{h - \left[l_0 + \frac{AL\rho g}{k} \left(\sqrt{\frac{\rho_v}{\rho}} - 1 \right) \right]}{L\sqrt{\frac{\rho}{\rho_v}}} = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1} \cdot h - 0,41.$$

Mivel $0 \leq \sin \alpha \leq 1$, a fenti megoldás csak a $31,8 \text{ cm} \leq h \leq 109,3 \text{ cm}$ szintmagasságokra érvényes.

Érdekes ezt összevetni az a) esettel, ahol $0 \leq h \leq 30$ cm. Úgy tűnik, hogy $30 \text{ cm} < h < 31,8 \text{ cm}$ esetén a rúd helyzetéről semmit sem tudunk mondani. Ennek oka az, hogy nagyon kis α szögek esetén a (2) egyenlet felírásánál használt vékony rúd közelítés nem igaz (l. 2. ábrát).



2. ábra

c) $h > 109,3$ cm esetén a rúd már függőleges,

teljes elmerüléséig az egyensúly feltétele az (1)–(3) egyenlet (most $\sin \alpha = 1$), amelynek megoldása

$$(5) \quad l = \frac{A\rho_v g \cdot \left(h - L \frac{\rho}{\rho_v}\right) + kl_0}{k + A\rho_v g} = 9 \cdot 10^{-2}h + 21,8 \text{ cm}$$

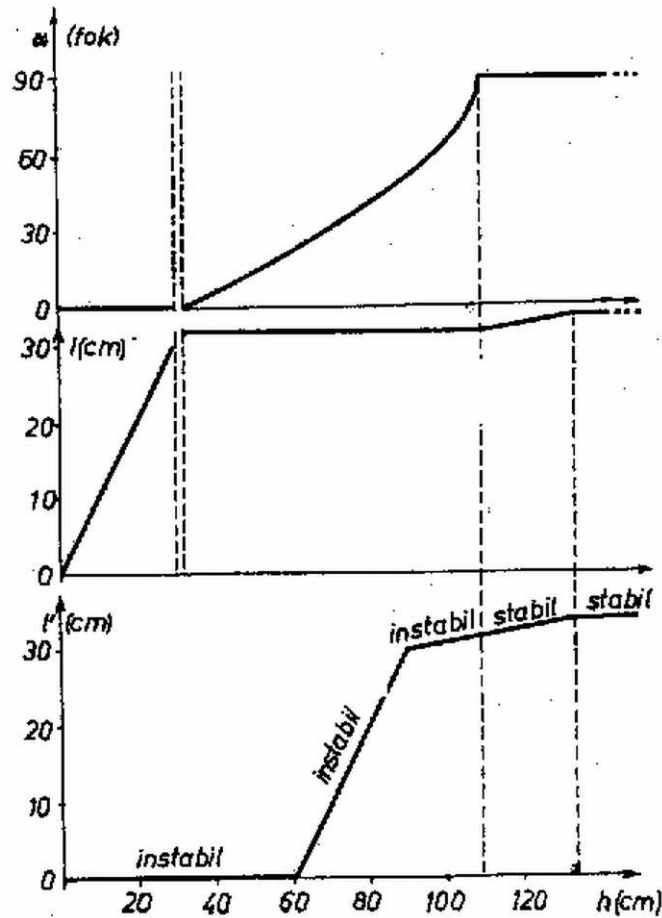
$$\alpha = 90^\circ.$$

A rúd akkor merül el, ha $h - l = L$, vagyis (5) alapján $h = 133,8$ cm-es vízmagasságnál.

d) $h > 133,8$ cm esetén a felhajtóerő állandó, ezért a rugóerő sem nő tovább. Ekkor (5)-ből

$$l = 33,8 \text{ cm}, \quad \alpha = 90^\circ.$$

Az $l(h)$, $\alpha(h)$ függvények menetét a)–c) pontok alapján a 3. ábra tünteti fel.



3. ábra

Térjünk vissza ezek után a (2) egyenlethez. Látjuk, hogy ez akkor is teljesül, ha $\cos \alpha = 0$, vagyis $\alpha = 90^\circ$. Ez azt jelenti, hogy létezik az eddigiektől különböző megoldása az (1)–(3) egyenletrendszernek, amikor is a rúd végig függőleges helyzetű.

Ezt a helyzetet (elvileg) úgy valósíthatjuk meg, hogy a rudat az edény aljára állítjuk, majd megkezdjük a víz betöltését. A továbbiakban röviden vizsgáljuk meg ezt az esetet is!

A) A rúd akkor kezd el úszni, amikor $F = G$, vagyis ($\rho/\rho_v = 0,6$ miatt) amikor 0,6 része már víz alatt van. Ezért $0 \leq h < h_0 = 60$ cm esetén $l' = 0$.

B) $h_0 < h \leq h_0 + l_0 = 90$ cm vízmagasság mellett a rugó még laza, ekkor

$$l' = h + h_0.$$

C) $h > h_0 + l_0$ esetén egészen a teljes elmerülésig a rúd helyzetét a (5) függvény írja le.

D) Megegyezik a d) pontban leírtakkal.

Az $l'(h)$ függvényt szintén a 3. ábrán szemléltettük.

Horváth Gábor (Kiskunhalas, Szilády Á. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. A rúd függőleges helyzete nem minden esetben stabilis. Az 1. ábra alapján beláthatjuk, hogy ehhez az szükséges, hogy $F(x/2) > G(l/2)$ legyen. A (4a) képlet szerint ez akkor következik be, ha $x > L\sqrt{\varrho/\varrho_v} = 77,5$ cm, vagyis – (5) alapján – ha $h > 109,3$ cm.