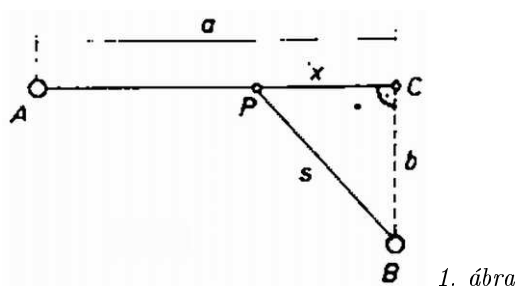




I. megoldás. A műútról a P pontban térjen le a traktor. Sebessége a műúton $v_1 = 30$ km/h, a szántón $v_2 = 15$ km/h. A műúton való haladás t_1 ideje az 1. ábra alapján:

$$t_1 = \frac{a - x}{v_1}.$$



Világos, hogy a szántón a traktornak egyenes úton kell haladnia. Így a szántón megtett út hossza:

$$s = \sqrt{b^2 + x^2},$$

a szántóföldön haladás ideje $t_2 = s/v_2$.

A $t = t_1 + t_2$ idő minimumát keressük.

A $t(x)$ függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol $\frac{dt(x)}{dx} = 0$. Végezzük el a deriválást:

$$\frac{dt(x)}{dx} = -\frac{1}{v_1} + \frac{x}{v_2 \sqrt{b^2 + x^2}}.$$

A szélsőérték helyre teljesülnie kell, hogy

$$-\frac{1}{v_1} + \frac{x}{v_2 \sqrt{b^2 + x^2}} = 0.$$

Ebből

$$x = x_0 = \sqrt{\frac{v_1^2}{v_1^2 - v_2^2} b}, \quad \text{ha} \quad v_1 > v_2.$$

Nem nehéz belátni, hogy $x > x_0$ esetén $\frac{dt(x)}{dx} > 0$, $0 < x < x_0$ esetén pedig $\frac{dt(x)}{dx} < 0$, így az $x = x_0$ helyen $t(x)$ valóban minimális.

A megadott értékekkel $x_0 = \sqrt{3}$ km.

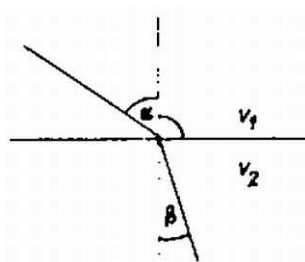
Tehát a műúton megtett út

$$y = (12 - \sqrt{3}) \text{ km} \approx 10,27 \text{ km}.$$

Megemlítjük, hogy $v_1 \leq v_2$ esetén nyilvánvaló, hogy a traktornak azonnal le kell térnie az útról és egyenesen kell haladnia az A pontból B felé.

Bálint Tünde (Dunaújváros, Münnich F. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Ha van két fényátersztő közegünk, a fény úgy halad át rajtuk, hogy teljesül az ún. Fermat elv, mely szerint a fénysugár valóban megtett útja két pont között, a lehetséges utak közül a minimális időtartamú.



Ebből adódik a fénytörésre vonatkozó Snellius–Descartes törvény, amely szerint

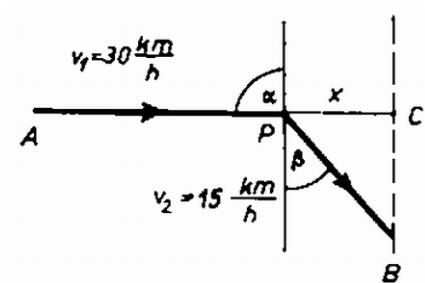
$$(1) \quad \sin \alpha / \sin \beta = v_1 / v_2,$$

ahol v_1 és v_2 a terjedési sebességek a két közegben (2. ábra).

A fentieket megfontolva az (1) képletet alkalmazhatjuk jelen feladatunkra is. Esetünkben $\alpha = 90^\circ$, tehát $\sin \alpha = 1$. A v_1/v_2 arány a feladat alapján 2.

Ezek alapján

$$\begin{aligned} \sin \beta &= 1/2, & \beta &= 30^\circ, \\ x &= b \operatorname{tg} \beta = \sqrt{3} \text{ km } (\approx 1,73 \text{ km}). \end{aligned}$$



3. ábra

Károlyi Gyula (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. Többen közelítő módszerrel keresték meg a minimumot. A megfelelő pontosságú eredményeket helyes megoldásként értékeltük.