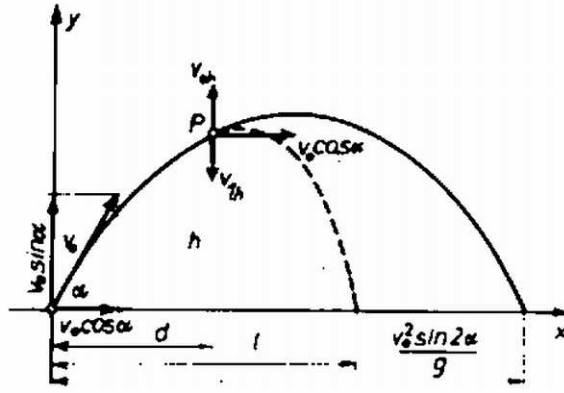


Vegyünk fel a függőleges síkban egy derékszögű koordináta-rendszert és indítsuk az M tömegű testet ennek origójából. Az origótól d távolságban az M tömegű test h magasságot ér el.



A ferde hajítás pályaegyenletéből

$$(1) \quad h = d \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{gd^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Ütközés előtt a P pontban az M tömegű test sebességének vízszintes és függőleges komponense

$$v_{0h} = \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha - 2gh};$$

a függőlegesen feldobott m tömegű test sebességkomponensei:

$$(3) \quad v_{1x} = 0; \quad v_{1h} = \pm \sqrt{v_1^2 - 2gh}$$

A két test rugalmatlan ütközés után közös sebességgel folytatja útját, amelynek komponenseit jelölje u_x , ill. u_y .

Az impulzusmegmaradás törvényéből:

$$(4) \quad Mv_{0x} = (M + m)u_x; \quad Mv_{0h} + mv_{1h} = (M + m)u_y.$$

(4)-ből (2) és (3) felhasználásával kapjuk:

$$(5) \quad u_x = \frac{Mv_0 \cos \alpha}{M + m};$$

$$(6) \quad u_y = \frac{\pm M \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha \pm 2gh} \pm m \sqrt{v_1^2 - 2gh}}{M + m}.$$

Vizsgáljuk meg a kapott (6) kifejezést! A számlálóban mindkét tag előtt bármelyik előjel állhat, így u_y -ra négy különböző érték adódik. Vegyük sorra ezek fizikai jelentését!

$0 < d < \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$ esetén (a két test az M tömegű test pályájának felszálló ágában találkozik) az előjelek $(+, +)$, ill. $(+, -)$ aszerint, hogy az m tömegű test „alulról” vagy „felülről” ütközik az M tömegű testbe. Az ábrán az utóbbit rajzoltuk fel.

$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} < d < \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ esetén (a két test a M tömegű test pályájának leszálló ágában ütközik), az előjelek a fentieknek megfelelően $(-, +)$, ill. $(-, -)$.

A két test találkozásának szükséges feltétele:

$$0 \leq d \leq \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Megjegyezzük, hogy lehetséges $d = 0$, $d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ és $d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$ megválasztása is a feladat paramétereinek.

Ezek azt jelentik, hogy a két test rendre az M tömegű test pályájának kezdő-, vég-, ill. tetőpontjában ütközik. Ezek a lehetőségek azonban nyilván bennfoglaltatnak az (5) képletben, ui. akkor rendre $h = 0$, $h = v_0^2 \sin^2 \alpha / 2g$, $h = 0$.

Nézzük meg ezek után, hogy az origótól milyen l távolságban ér földet a két test! Ütközés után a vízszintes és függőleges elmozdulás:

$$(7) \quad x = d + u_x \cdot t,$$

$$(8) \quad y = h + u_y \cdot t - (g/2)t^2.$$

(7)-ből és (8)-ból t kiküszöbölésével kapjuk a következő pályaegyenletet:

$$(9) \quad y - h = \frac{u_y}{u_x} (x - d) - \frac{g}{2u_x^2} (x - d)^2.$$

Földetéréskor $x = l$, $y = 0$, amit (9)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$l = d + \frac{u_x}{g} \left(u_y + \sqrt{u_y^2 + 2gh} \right),$$

ahol h , u_x , u_y rendre az (1), (5) és (6) kifejezések által adott. Mivel mindig $l > d$, ezért (9) másik megoldásának nincs fizikai értelme.

Jeney Tamás (Miskolc, Földes F. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. A függőleges impulzus-komponensekre a (4) megmaradási törvény csak akkor igaz (ütközéskor a belső erőkön kívül hat a nehézségi erő is), ha az ütközést pillanatszerűnek tételezzük fel.

Ha ui. az ütközéskor működő belső erők abszolút értékét F -fel jelöljük, akkor ütközéskor a mozgásegyenletek

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(Mv_{0h})}{\Delta t} &= -Mg + F, \\ \frac{\Delta m(v_{1h})}{\Delta t} &= -mg - F. \end{aligned}$$

A két egyenletet összeadva kapjuk, hogy

$$\Delta(Mv_{0h} + mv_{1h}) = -(M + m)g\Delta t.$$

Látható, hogy $\Delta t \rightarrow 0$ esetén valóban $\Delta(Mv_{0h} + mv_{1h}) = 0$.

Osztányi Gábor (Miskolc, Földes F. Gimn., II. o. t.)