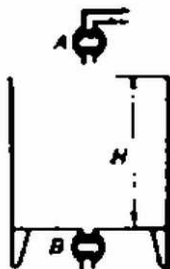


A tartály egyenletesen telik, ha csak az A csap van nyitva. Jelöljük q_A -val a csap keresztmetszetét, v_A -val a rajta átfolyó víz sebességét, T -vel a hasáb vagy henger alakú edény alapterületét. Ekkor az edénybe időegység alatt $q_A v_A$ térfogatú víz folyik be, azaz a pillanatnyi vízmagasságot h -val jelölve

$$(1) \quad \frac{Th}{t} = q_A v_A.$$

A H magasságot t_A idő alatt éri el a vízszint, ezért

$$(2) \quad \frac{TH}{t_A} = q_A v_A.$$



Zárjuk el az A és nyissuk ki a B csapot. Tegyük fel, hogy a tartály alapterületéhez képest jóval kisebb a csap q_B keresztmetszete. Ekkor a kifolyás közben az edényben levő víz mozgási energiája elhanyagolható. A nehézségi erő által a teljes víztömegén végzett munka csak az időegység alatt kifolyó, $q_B v_B$ térfogatú víz mozgási energiáját növeli. Ez a munka megegyezik azzal, amit a nehézségi erő akkor végez, ha a h magasságú vízoszlop felszínéről az adott térfogatú vizet az edény alján levő csaphoz visszük. Ezért

$$(3) \quad v_B = \sqrt{2gh}.$$

Ez Torricelli tétele. (A veszteségektől eltekintettünk).

Ha kicsiny Δt idő alatt a vízmagasság Δh -val csökken, akkor a v_B sebességet ezalatt állandónak tekintve írhatjuk:

$$T \Delta h = -q_B v_B \Delta t,$$

így a $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenettel kapjuk, hogy a magasság időegységre eső csökkenését a

$$(4) \quad \frac{T dh}{dt} = -q_B v_B = -q_B \sqrt{2gh}$$

egyenlet írja le.

Határozzuk meg ennek alapján a q_B keresztmetszetet. Célszerű $t = 0$ időpontnak venni azt a pillanatot, amikor az edény éppen kiürült, továbbá t helyett bevezetni $\tau = -t$ változót. Ekkor $\tau = t_B$ (azaz $t = -t_B$) esetén lesz a h magasság H , továbbá a (4) egyenlet így írható:

$$(5) \quad \frac{dh}{d\tau} = \sqrt{2 \frac{q_B^2}{T^2} g} \cdot \sqrt{h}.$$

Tehát olyan $h(\tau)$ függvényt keresünk, amely kielégíti az (5) összefüggést (differenciálegyenletet) és a $h(0) = 0$ kezdeti feltételt. Ugyanilyen típusú egyenletnek tesz eleget az egyenletesen gyorsuló mozgás út-idő függvénye:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2ax},$$

ahol a a gyorsulás, ennek az $x(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

$$s = (a/2)t^2.$$

Ennek alapján várható, hogy

$$h(\tau) = (1/2)(q_B^2/T^2)g \cdot \tau^2,$$

és ez valóban kielégíti az (5) egyenletet, valamint a $h(0) = 0$ kezdeti feltételt.

Matematikai és fizikai megfontolásokkal be lehet bizonyítani, hogy a magasságot leíró $h(\tau)$ nem lehet más. Így $\tau = t_B$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$(6) \quad H = \frac{1}{2}g \frac{q_B^2}{T^2} t_B^2,$$

ahonnan

$$(7) \quad q_B = \sqrt{\frac{2H}{g}} \frac{T}{t_B}.$$

Nyissuk ki mindkét csapot! Tegyük föl, hogy az A csapból kifolyó víz mozgási energiája a B csapon kifolyó víz kinetikus energiáját nem növeli (pl. a befolyó víz energiája teljes egészében hővé alakul), azaz a (3) egyenlet változatlanul érvényes. Eszerint $h = 0$ kezdeti vízszintnél csak befolyik a víz az edénybe, de ki nem folyik belőle. A vízmagasság addig növekszik, amíg az időegység alatt ki- és befolyó vízmennyiség meg nem egyezik. A (2), a (4) és a (7) egyenletek alapján ekkor

$$0 = q_A v_A - q_B v_B = \frac{TH}{t_A} - \sqrt{\frac{2H}{g}} \frac{T}{t_B} \sqrt{2gh^*}$$

azaz

$$h^* = \frac{H}{4} \frac{t_B^2}{t_A^2}.$$

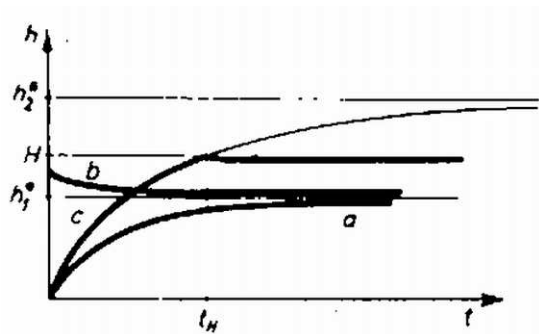
A vízmagasság ezen a szinten stabilizálódik, ha $h^* \leq H$, azaz $t_B < 2t_A$. Ellenkező esetben az egyensúlyi magasság H -nál nagyobb lenne, ekkor a tartály megtelik és állandóan víz folyik ki az oldalán.

Szilárd Mónika (Bp., Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., III. o. t.)
és Horváth Gábor (Kiskunhalas, Szilády Á. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. A (2), (4) és (7) egyenletek alapján abban az esetben, ha mindkét csap nyitva van, a magasságváltozást

$$\frac{dh}{dt} = \frac{H}{t_A} - \frac{2\sqrt{H}}{t_B} \sqrt{h}.$$

differentiálegyenlet írja le. Ennek alapos vizsgálatával a következőket lehet igazolni. A $h(t)$ függvény szigorúan monoton nő, illetve csökken attól függően, hogy a folyamat kezdeti pillanatában a magasság kisebb vagy nagyobb-e, mint a $h^* = \frac{H}{4} \frac{t_B^2}{t_A^2}$ magasság. Mindkét esetben, ha csak $h^* \leq H$, $t \rightarrow \infty$ esetben $h(t)$ tart a h^* értékhez, de véges idő alatt nem éri el azt. Ha $h^* > H$, akkor a vízszint véges idő alatt eléri a H magasságot, s ezután állandóan ezt a szintet tartja, miközben az edény szélén is folyik ki víz.



Az ábrán három kvalitatív $h(t)$ diagramot ábrázoltunk. Az a) görbe a $h_1^* < H$ és $h(0) = 0$, a b) görbe a $h_1^* < H$ és $h_1^* < h(0) < H$, a c) görbe a $h_2^* > H$ és $h(0) = 0$ feltételek mellett mutatja a vízszint magasságának időfüggését.