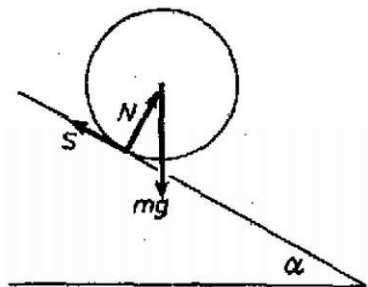


Először határozzuk meg a golyó gyorsulását! A golyóra súlyereje, a lejtő nyomóereje és a súrlódási erő hat (1. az ábrát). A golyó tömegközéppontja a lejtőre merőlegesen nem gyorsul, lejtő irányú gyorsulása a .



Newton II. törvényéből

$$\begin{aligned} (1) \quad & mg \cos \alpha - N = 0, \\ (2) \quad & mg \sin \alpha - S = ma. \end{aligned}$$

A forgómozgás alapegyenlete:

$$(3) \quad Sr = \theta \beta = (2/5)mr^2 \beta.$$

1. Ha a gömb csúszás nélkül gördül, akkor

$$(4) \quad a_1 = \beta_1 r.$$

A (2)-(4) egyenletekből a gyorsulás:

$$(5) \quad a_1 = \beta_1 r = (5/7)g \sin \alpha \approx 3,57 \text{ m/s}^2.$$

A tapadás feltétele (1), (3) és (4) alapján

$$S = (2/5)ma_1 \leq \mu N = \mu mg \cos \alpha,$$

ahonnan (5) folytán

$$(6) \quad \mu \geq \mu_0 = (2/7) \tan \alpha = 0,165.$$

2. Ha ez a feltétel nem áll fenn, a gömb csúszva gördül. Ekkor csúszó súrlódás lép fel, tehát

$$(7) \quad S = \mu N = \mu mg \cos \alpha,$$

$$(8) \quad a_2 = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha,$$

$$(9) \quad \beta_2 = \frac{5\mu g \cos \alpha}{2r}$$

Vizsgáljuk most meg, hogyan mozog a golyó a feladatban adott lejtőn!

Két eset lehetséges:

a) Ha mindkét tapadási súrlódási együttható nagyobb vagy egyenlő μ_0 -al, akkor a golyó az egész lejtőn tisztán gördül. Ez elképzelhető, mivel a tapadó súrlódási együttható nagyobb a csúszónál, így lehetséges, hogy bár $\mu_2 = 0,1$, a tapadó súrlódásra $\mu_{2t} \geq 0,165$.

Dinamikai számolás helyett alkalmazzuk most az energiamegmaradás törvényét! Súrlódási veszteség ekkor nincs, hiszen a golyó lejtővel érintkező pontjánál a golyó és a lejtő között nincs elmozdulás:

$$(10) \quad mg(2s) \sin \alpha = (1/2)mv^2 + (1/2)\theta\omega^2 = (1/2)mv^2 + (1/2) \cdot (2/5)mr^2v^2/r^2.$$

Innen a lejtő alján a golyó sebessége:

$$(11) \quad v = \sqrt{(20/7)sg \sin \alpha} \approx 3,78 \text{ m/s}.$$

Mivel a golyó sehol nem csúszik meg, eredményünk független a súrlódási együtthatóktól, így azok felcserélésétől is.

b) Ha azon a szakaszon, ahol $\mu_2 = 0,1$, a tapadó súrlódási együttható is kisebb μ_0 -nál, akkor ezen a szakaszon a golyó megcsúszik. A felső s hosszúságú szakaszon csúszásmentes gördülés történik a_1 gyorsulással. A lejtő közepén a golyó sebessége és szögsebessége:

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{2a_1 s} \approx 2,67 \text{ m/s}, \\ \omega_1 &= v_1/r \approx 26,71 \text{ 1/s}. \end{aligned}$$

A lejtő második felén a golyó megcsúszik, gyorsulása (8)-ból $a_2 \approx 4,13 \text{ m/s}^2$, szöggyorsulása (9)-ből $\beta_2 \approx 21,7 \text{ 1/s}^2$. Legyen t_2 a lejtő közepétől a leérésig eltelt idő. Ekkor a haladó mozgásra

$$\begin{aligned}s &= v_1 t_2 + (a_2/2) t_2^2, \\ v_2 &= v_1 + a_2 t_2.\end{aligned}$$

Ezekből az egyenletekből a leérésig elért sebesség:

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2a_2 s} \approx 3,93 \text{ m/s}.$$

A második szakasz megtételéhez szükséges idő

$$t_2 \approx 0,303 \text{ s},$$

a végső szögsebesség

$$\omega_2 = \beta_2 t_2 + \omega_1 \approx 33,3 \text{ 1/s}.$$

A súrlódási munkából származó energiavesztés a golyó lejtővel érintkező pontjának a lejtőhöz viszonyított elmozdulásával arányos. Ez az elmozdulás a lejtő második szakaszának hossza és az elfordulásból származó kerületi elmozdulás különbsége. A súrlódási munka tehát

$$W = \mu_2 m g \cos \alpha [s - (\beta_2/2) t_2^2 r - \omega_1 t_2 r] \approx 0,078 \text{ J}.$$

Eredményünk ellenőrizhető a munkatétel alapján:

$$m g (2s) \sin \alpha = (1/2) m v_2^2 + (1/2) \theta \omega_2 + W.$$

Cseréljük fel a súrlódási együtthatókat! Ekkor az első szakaszon lesz csúszva gördülés a_2 gyorsulással és β_2 szöggyorsulással. A lejtő közepén a sebesség

$$v_3 = \sqrt{2s a_2} \approx 2,88 \text{ m/s},$$

az indulástól eltelt idő

$$t_3 = \sqrt{2s/a_2} \approx 0,696 \text{ s},$$

az elért szögsebesség

$$\omega_3 \approx \beta_2 t_3 \approx 15,1 \text{ 1/s}.$$

Az alsó szakaszon ugyan teljesül $\mu_1 > \mu_0$ összefüggés, azonban $v_3 > \omega_3 r$, így a golyó egy s_4 hosszúságú szakaszon köszörülni fog. A gyorsulás és a szöggyorsulás ekkor (8)-ból és (9)-ből

$$a_4 \approx 1,54 \text{ m/s}^2, \quad \beta_4 \approx 86,6 \text{ 1/s}^2.$$

A köszörülés megszűnéséig t_4 idő telik el, ezalatt a golyó sebessége és a kerületi sebesség egyenlővé válik:

$$v_4 = a_4 t_4 + v_3 = r(\beta_4 t_4 + \omega_3).$$

Innen

$$t_4 \approx 0,192 \text{ s}, \quad v_4 \approx 3,17 \text{ m/s}, \quad s_4 = \frac{v_3 + v_4}{2} t_4 \approx 0,581 \text{ m} (< s).$$

A hátralevő $s - s_4$ hosszúságú szakaszon a_1 gyorsulással gördül a golyó, a végsebesség

$$v_5 = \sqrt{v_4^2 + 2a_1(s - s_4)} \approx 36,1 \text{ m/s},$$

kisebb, mint az előző esetben. A különbségért az s_4 szakaszon történő köszörülés a felelős. Súrlódási veszteség most az első és a második szakaszon adódik:

$$W = \mu_2 m g \cos \alpha [s - (1/2) \beta_2 t_3^2] + \mu_1 m g \cos \alpha \left(s_4 - r \frac{\omega_3 + \omega_4}{2} t_4 \right) \approx 0,869 \text{ J},$$

ami a hosszabb köszörülés miatt lényegesen több, mint az előző esetben.

Horváth Gábor (Kiskunhalas, Szilády Á. Gimn., III. o. t.)