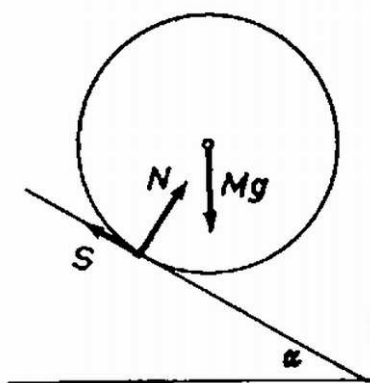


I. megoldás. Határozzuk meg először a gömbhéjnak a középpontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát! Legyen a gömbhéj külső sugara R , belső sugara r , anyagának sűrűsége ρ .

$$\Theta_0 = \frac{2}{5} \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 \rho \cdot R^2 - \frac{2}{5} \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 \rho \cdot r^2 = \frac{2}{5} M \cdot \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

ahol $M = (4\pi/3) (R^3 - r^3) \rho$ a gömbhéj tömege. Nagyon vékony gömbhéj esetén

$$(1) \quad \Theta = \lim_{r \rightarrow R} \Theta_0 = \lim_{r \rightarrow R} \frac{2}{5} M \frac{(R-r)(R^4 + R^3r + R^2r^2 + Rr^3 + r^4)}{(R-r)(R^2 + Rr + r^2)} = \frac{2}{3} MR^2.$$



1. ábra

Számítsuk ki az üres gömb a_0 gyorsulását! A gömb középpontjának lejtő irányú mozgására és a tömegközéppont körüli forgásra vonatkozó egyenlet, valamint a csúszásmentes gördülést figyelembe vevő kényszerfeltétel (1. ábra):

$$(2) \quad Mg \sin \alpha - S = Ma_0,$$

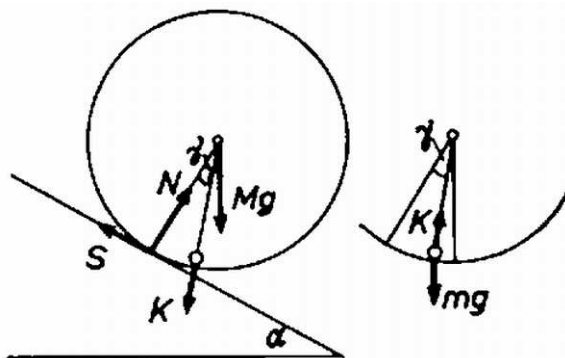
$$(3) \quad SR = \Theta \beta,$$

$$(4) \quad a_0 = \beta R,$$

ahol β a szöggyorsulás.

Az (1)–(4) egyenletekből a gömb gyorsulása

$$(5) \quad a_0 = (3/5)g \sin \alpha.$$



2. ábra

Helyezzük az m tömegpontot a gömbhéj belsejébe! Ha a gömbhéj egyenletesen, lengések nélkül gyorsul, a tömegpont helyét jellemző γ szög a mozgás során nem változik (2. ábra). A tömegpont és a gömbhéj között sugár irányú K nagyságú erő hat. A tömegpont ill. a gömbhéj mozgását leíró egyenletek:

$$(6) \quad mg \sin \alpha - K \sin \gamma = ma,$$

$$(7) \quad Mg \sin \alpha + K \sin \gamma - S = Ma,$$

$$(8) \quad SR = \Theta \beta,$$

$$(9) \quad \alpha = \beta R,$$

ahonnan

$$(10) \quad a = \frac{M+m}{(5/3)M+m} g \sin \alpha.$$

A feladat feltétele szerint $a = 1,2 a_0$, azaz

$$(11) \quad 1,2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{M+m}{(5/3)M+m}.$$

Az egyenletet megoldva a tömegpont és a gömb tömegének aránya

$$M/m = 7/5.$$

Krähling János (Bonyhád, Petőfi S. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Tegyük fel, hogy a gömbhéj h magasságból gördül le a lejtőn. A kezdeti helyzeti energia a gömb mozgási és forgási energiájává ill. a tömegpont mozgási energiájává alakul. Üres gömbre ill., ha a tömegpont a gömb belsejében van:

$$(12) \quad Mgh = (1/2)Mv_0^2 + (1/2)\Theta\omega_0^2,$$

$$(13) \quad (M+m)gh = (1/2)Mv^2 + (1/2)\Theta\omega^2 + (1/2)mv^2,$$

ahol a tökéletes gördülés miatt $v_0 = \omega_0 R$ és $v = \omega R$. Egy l úton a gyorsulással mozgó test végsebességére a $v^2 = 2al$ összefüggés érvényes, tehát a gyorsulás arányos a sebesség négyzetével. Így a gyorsulás 20%-os növekedésére vonatkozó feltétel ekvivalens az

$$(14) \quad 1,2 \cdot v_0^2 = v^2$$

összefüggéssel. A (12)–(14) egyenletrendszert megoldva a tömegek aránya meghatározható,

$$M/m = 7/5.$$

Czuczor Judit (Paks, Vak Bottyán J. Gimn., III. o. t.)