A felfelé mászó ember gyorsulása a kötélhez viszonyítva (F a kötélerő, M az ember tömege):

$$a_e = \frac{F - Mg}{M} = 0{,}703 \text{ m/s}^2.$$

A test gyorsulása a földhöz viszonyítva:

$$a_t = \frac{F - mg}{m} = 0{,}44 \text{ m/s}^2.$$

Tegyük fel, hogy a mozgás kezdetekor a test is és az ember is a földön áll. $t = 10$ s múlva a földtől mért távolságuk:

$$s_e = (1/2)(a_e - a_t)t^2, \qquad s_t = (1/2)a_t t^2;$$

sebességük (a sebességek felfelé pozitívak)

$$v_e = (a_e - a_t)t, \qquad v_t = a_t t$$

lesz. Behelyettesítve a numerikus adatokat

$$s_e = 13{,}15 \text{ m}, \qquad s_t = 22 \text{ m}, \qquad v_e = 2{,}63 \text{ m/s}, \qquad v_t = 4{,}4 \text{ m/s}.$$

Mivel $t = 10$ s-nál az ember abbahagyja a mászást és erősen megfogja a kötelet, az ember is és a test is a v_e, ill. v_t kezdősebességeknek megfelelő függőleges hajítás szerint folytatja a mozgást addig, amíg a kötél újra meg nem feszül. Az ember pályájának holtpontja:

$$s_e + v_e^2/(2g) = 13{,}15 \text{ m} + 0{,}35 \text{ m} = 13{,}5 \text{ m}.$$

A test pályájának holtpontja

$$s_t + v_t^2/(2g) = 22 \text{ m} + 0{,}98 \text{ m} = 22{,}98 \text{ m}.$$

A kötél akkor feszül meg ismét, amikor a hajítások kezdőpontjaitól mért elmozdulások összege nulla. Ha ez $t^{'}$ idő múlva következik be, akkor

$$v_e t' - (g/2)t' + v_t t' - (g/2)t'^2 = 0,$$

amiből

$$t' = \frac{v_e + v_t}{g} = 0{,}716 \text{ s}.$$

A test helyzete ekkor

$$s_t' = s_t + v_t t' - (g/2)t'^2 = 22{,}63 \text{ m}.$$

A sebességek a t' pillanatban (még a kötél megfeszülése előtt):

$$v_e' = v_e - gt' = -4{,}39 \text{ m/s},$$

$$v_t' = v_t - gt' = -2{,}62 \text{ m/s}.$$

A kötél megfeszülésekor az ember és a test a kötél közvetítésével rugalmatlanul ütközik. Ezért

$$\overline{v}_t' = -\overline{v}_e' = \frac{mv_t' - Mv_e'}{m + M} = 0{,}84 \text{ m/s},$$

tehát a test felfelé, az ember lefelé kezd mozogni. Az ember azonban felfelé gyorsul:

$$a_e' = +g\frac{m - M}{m + M} = +0{,}124 \text{ m/s}^2 = -a_t',$$

így még mielőtt a földet elérné, felfelé kezd mozogni. A test lefelé gyorsul és t'' idő múlva éri el a talajt:

$$s_t' + \overline{v}_t' t'' - a' t''/2 = 0,$$

amiből

$$t'' = 27{,}04 \text{ s}.$$

Ekkor az ember

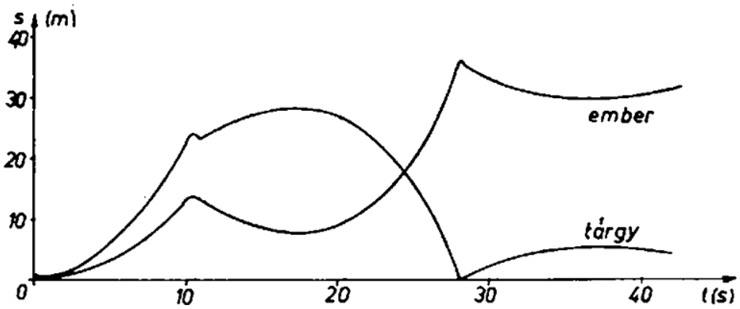
$$s_e + s_t = 35{,}15 \text{ m}$$

magasan van és sebessége

$$v_e' = \overline{v}_e' + a_e' t'' = 2{,}51 \text{ m/s}.$$

Ha ekkor a test rugalmatlanul ütközik, akkor a kötél újabb megfeszüléséig a talajon marad. Az ember további mozgását a v_e'', kezdősebességű függőleges hajítás írja le. Amikor $-v_t''$ sebességgel ismét eléri az $s_e + s_t$ magasságú pontot, a kötél ismét megfeszül, a tárgy felemelkedik, de negatív gyorsulása miatt végül újra eléri a talajt. Ez a mozgás fog ismétlődni, de úgy, hogy az ember függőleges hajítási kezdősebessége mindig csökken. Mivel a test mindig a talajról indul és oda is érkezik, az n-edik lépésben az ember függőleges hajítási sebessége

$$V^{(n)} = \frac{M}{m + m} v^{(n-1)}.$$



Az n-edik függőleges hajításhoz

$$t^{(n)} = \frac{2v^{(n)}}{g}$$

idő kell, amikor a kötél feszes, a mozgás

$$\overline{t}^{(n)} = \frac{2v^{(n+1)}}{a}$$

időt vesz igénybe. Az egész mozgás

$$T = t + t' + t'' + \sum_{n=0}^{\infty}(t^{(n)} + \overline{t}^{(n)})$$

ideig tart. Számadatokkal:

$$T = 10\ \mathrm{s} + 0{,}716\ \mathrm{s} + 27{,}04\ \mathrm{s} + 2v_e'' \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{g}\left(\frac{M}{m+M}\right)^n + \frac{1}{a_e'}\left(\frac{M}{m+M}\right)^{n+1}\right] =$$

$$= 37{,}75\ \mathrm{s} + \frac{2v_e''}{g}\frac{1}{1-\dfrac{M}{m+M}} + \frac{\dfrac{2v_e''}{a_e'}\cdot\dfrac{M}{m+M}}{1-\dfrac{M}{m+M}} = 78{,}23\ \mathrm{s},$$

ahol felhasználtuk, hogy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$, ha $|q| < 1$.

A végső helyzetben a test a földön, az ember 35,15 m magasan lesz.

Seregdy Tamás (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., II. o. t.)
dolgozata alapján