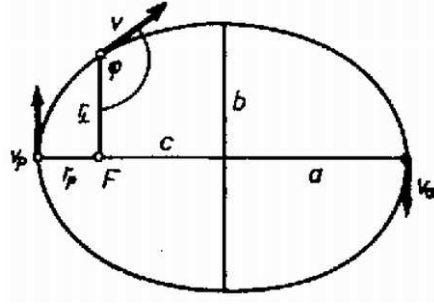


A földközeli ponthoz tartozó vezérsugár (r_p) és a rá merőleges vezérsugár ($r_\perp$) hosszának ismeretében egyszerű geometriai összefüggések segítségével meg lehet határozni a műhold ellipszispályájának paramétereit.



1. ábra

Az 1. ábra alapján a fél nagytengely:

$$(1) \quad a = c + r_p,$$

ahol

$$(2) \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

(b a fél kistengely). A $(c; r_\perp)$ koordinátájú pont rajta van az ellipszisen, így az ellipszis egyenletét felhasználva:

$$(3) \quad (c^2/a^2) + (r_\perp^2/b^2) = 1.$$

Az (1)–(3) egyenletekből a pálya paraméterei:

$$(4) \quad a = \frac{r_p^2}{2r_p - r_\perp} = 36 \cdot 10^6 \text{ m}; \quad c = \frac{r_p(r_\perp - r_p)}{2r_p - r_\perp} = 18 \cdot 10^6 \text{ m};$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = 31,18 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

A műhold energiája a keringés során

$$(5) \quad E = -f(Mm/r) + (1/2)mv^2,$$

ahol f a gravitációs állandó, M és m a Föld, illetve a műhold tömege, r a Földtől mért távolság, v a műhold sebessége. Centrális erőterben történő mozgásnál a másik mozgásállandó az ún. területi sebesség (a vezérsugár által időegység alatt sűrolt terület):

$$(6) \quad v_t = (1/2)rv \sin \varphi,$$

ahol φ a vezérsugár és a sebességvektor által bezárt szög.

Alkalmazzuk a fenti megmaradási tételeket a földközeli ($r_p = a - c$) és a földtávolsági ($r_a = a + c$) pontokra, felhasználva, hogy ezekben a helyzetekben $\varphi = 90^\circ$!

$$(7) \quad E = -f(Mm/r_p) + (1/2)mv_p^2 = -f(Mm/r_a) + (1/2)mv_a^2,$$

$$(8) \quad v_t = (1/2)r_p v_p = (1/2)r_a v_a.$$

A (7) és (8) egyenleteket megoldva a megmaradó mennyiségekre, az összenergia:

$$(9) \quad E = -f \frac{Mm}{r_a + r_p} = -f \frac{Mm}{2a},$$

a területi sebesség:

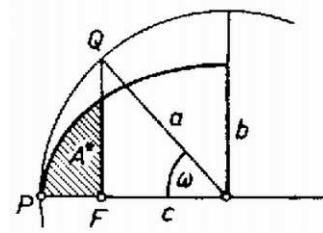
$$(10) \quad v_t^2 = -[E/(2m)]r_a r_p = [b^2/(4a)]fM.$$

A kért helyzetben (5) és (9) alapján a műhold sebessége:

$$(11) \quad v = \sqrt{fM[(2/r_\perp) - (1/a)]} = 4,3 \text{ km/s},$$

míg a sebesség és a vezérsugár által bezárt szög (6) és (10) alapján:

$$(12) \quad 180^\circ - \varphi = \arcsin \frac{2v_t}{r_\perp v} = \arcsin \frac{b}{\sqrt{2ar_\perp - r_\perp^2}} = 63^\circ 27'.$$



2. ábra

A területi sebesség ismeretében a perigeum és a kérdéselt helyzet közt eltelt időt a vezérsugár által sűrolt terület kiszámításával határozhatjuk meg. A 2. ábrán az ellipszist egy a sugarú körből származtattuk (b/a) affinitással. Mivel $\cos \omega = c/a = 1/2$ és így $\omega = 2\pi/6$, a PFQ körszelet területe:

$$(13) \quad A = a^2 \pi \frac{\omega}{2\pi} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{8} = a^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right).$$

A vezérsugár által sűrolt terület:

$$(14) \quad A^* = A(b/a) = ab[(\pi/6) - (\sqrt{3}/8)],$$

és az eltelt idő:

$$(15) \quad t = \frac{A^*}{v_t} = 2\sqrt{\frac{a^3}{fM}} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) = 110 \text{ perc.}$$

Pelle Judit (Eger, Szilágyi E. Gimn., III. o. t.)