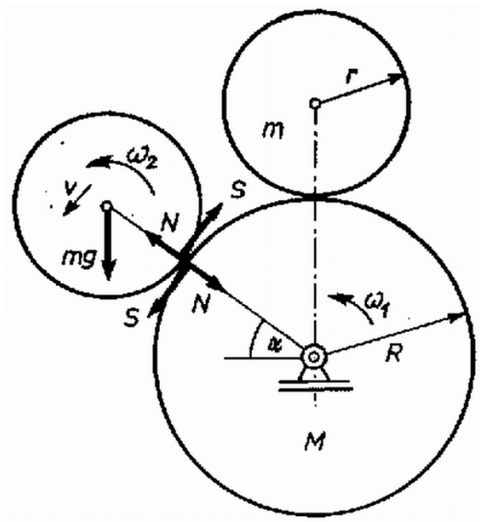
Tekintsük azt a megcsúszás előtti helyzetet, amikor a két henger tengelyére illeszkedő sík a vízszintessel α szöget zár be! A nagy henger rögzített tengely körüli forgómozgást végez ω_1 szögsebességgel és β_1 szöggyorsulással. A kis henger mozgását bontsuk fel tömegközéppontjának haladó mozgására és a tömegközéppont körüli ω_2 szögsebességű, β_2 szöggyorsulású forgómozgásra. A tömegközéppont v sebességű körmozgást végez, érintő irányú gyorsulása a_t, centripetális gyorsulása a_{cp}. A testekre az ábrán látható erők hatnak.



Írjuk fel a mozgásegyenleteket:

(1) $$(1/2)MR^2\beta_1 = SR,$$
(2) $$(1/2)mr^2\beta_2 = Sr,$$
(3) $$ma_t = mg\cos\alpha - S,$$
(4) $$ma_{cp} = mg\sin\alpha - N.$$

A centripetális gyorsulás:

(5) $$a_{cp} = \frac{v^2}{r+R}\,.$$

A két henger érintkezési pontjának sebessége ugyanakkora, akár a nagy, akár a kis henger pontjának sebességeként fejezzük ki, így

(6) $$v - \omega_2 r = \omega_1 R,$$
(7) $$a_t - \beta_2 r = \beta_1 R.$$

A súrlódási erő (1), (2), (3) és (7) segítségével meghatározható:

(8) $$S = \frac{Mmg\cos\alpha}{3M+2m}\,.$$

A nyomóerő kifejezéséhez szükségünk van a kis henger sebességére. Ezt a legegyszerűbben az energiamegmaradás tétele segítségével határozhatjuk meg:

(9) $$mg(R+r)(1-\sin\alpha) = (1/2)mv^2 + (1/4)mr^2\omega_2^2 + (1/4)MR^2\omega_1^2.$$

ω_1-et és ω_2-t v-vel kell kifejeznünk. Ehhez egyrészt felhasználjuk a (6) kényszerfeltételt, másrészt (1) és (2) hányadosát képezve

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{mr}{MR}\,.$$

Mivel ez az összefüggés a hengerek megmozdulásától kezdve fennáll, a szögsebességekre is érvényes, hogy

(10) $$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{mr}{MR}\,.$$

(9), (6) és (10) felhasználásával

$$v^2 = \frac{4g(R+r)(1-\sin\alpha)(m+M)}{2m+3M}\,. \tag{11}$$

(11)-et (5)-be, majd (4)-be helyettesítve a nyomóerő

$$N = \frac{mg[\sin\alpha(7M+6m) - 4(m+M)]}{3M+2m}\,. \tag{12}$$

Annak feltétele, hogy a két henger ne csússzék meg egymáson:

$$S \le \mu N. \tag{13}$$

Először oldjuk meg az $S \le \mu N$ egyenletet. Tekintve, hogy 0 és $\pi/2$ között a sin függvény szigorúan nő, a cos függvény szigorúan csökken, (8) és (12) alapján világos, hogy 0 és $\pi/2$ között (az α-ra vonatkozó) $S = \mu N$ egyenletnek legfeljebb egy megoldása lehet. (8) és (12) behelyettesítésével, négyzetre emelve a következő egyenletet kapjuk:

$$\begin{gathered}\sin^2\alpha[\mu^2(7M+6m)^2 + M^2] - \sin\alpha\cdot 8\mu^2(m+M)(7M+6m)-\\ -M^2 + 16\mu^2(m+M)^2 = 0.\end{gathered} \tag{14}$$

A $\sin\alpha$-ra vonatkozó másodfokú egyenlet két gyöke közül a nagyobbik a számunkra érdekes (a megfelelő hegyesszöget jelölje α_1):

$$\sin\alpha_1 = \frac{4\mu^2(m+M)(7M+6m) + M\sqrt{M^2+\mu^2(10m+11M)(2m+3M)}}{\mu^2(7M+6m)^2 + M^2}\,,$$

mivel könnyen látható, hogy erre teljesül a

$$0 < \sin\alpha_1 < 1$$

feltétel, továbbá ezt (12)-be helyettesítve N-re pozitív érték adódik, míg a másik gyökre a fenti feltételek mindegyike nem teljesül. (Ez következik abból is, hogy 0 és $\pi/2$ között az $S = \mu N$ egyenletnek legfeljebb egy megoldása lehet.)

Mivel a sin függvény szigorúan nő, a cos függvény szigorúan csökken 0 és $\pi/2$ között, azért (8) és (12) alapján adódik, hogy $\pi/2 \ge \alpha \ge \alpha_1$ esetén a (13) egyenlőtlenség nem teljesül, de $0 < \alpha < \alpha_1$ esetén $S < \mu N$, tehát az $\alpha = \alpha_1$ szögnél szükségképpen megcsúsznak egymáson a hengerek.

Egyed Károly (Gödöllő, Török I. Gimn., IV. o. t.)