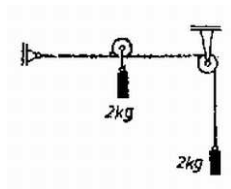


Írjuk fel az egyes testek mozgásegyenletét és a kényszerfeltételt.



A függőleges fonálon lógó testre

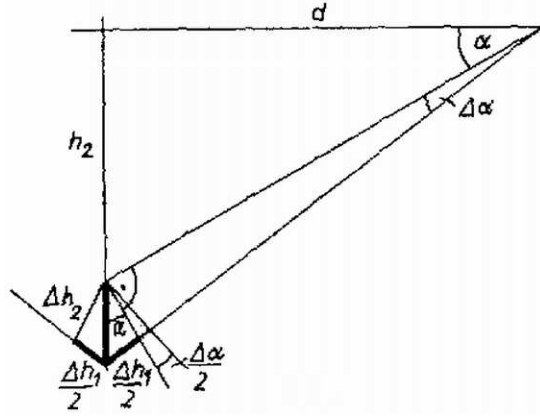
$$(1) \quad K - mg = ma_1,$$

a mozgó csigán levőre pedig

$$(2) \quad mg - 2K \cdot \sin \alpha = ma_2.$$

(A gyorsulásokat – és később a sebességeket is – akkor vettük pozitívnak, ha azok az 1. ábrán bejelölt irányokba mutatnak.)

Nézzük meg a testek helyzetének a megváltozását egy kis Δt időköz alatt! Mozduljon el az 1-es test Δh_1 -gyel felfelé, eközben süllyedjen a 2-es test Δh_2 -vel és az α szög növekedjen $\Delta \alpha$ -val!



2. ábra

A 2. ábráról leolvasható, hogy

$$(3) \quad \Delta h_1/2 = \Delta h_2 \cdot \sin(\alpha + \Delta\alpha) - \Delta h_2 \cos \alpha \cdot \operatorname{tg}(\Delta\alpha/2).$$

Mivel

$$(4) \quad \begin{aligned} \Delta h_1 &\cong v_1 \Delta t \\ \Delta h_2 &\cong v_2 \Delta t, \end{aligned}$$

ahol v_1 és v_2 a pillanatnyi sebességek,

$$(5) \quad (1/2)v_1 \cong v_2 \sin(\alpha + \Delta\alpha) - v_2 \cos \alpha \cdot \operatorname{tg}(\Delta\alpha/2).$$

(4) és így (5) is annál pontosabb, minél kisebbre választjuk Δt -t. Ezért Δt -t egyre kisebbnek választva az (5) közelítő egyenlőség végül is a pillanatnyi sebességek között fennálló

$$(6) \quad (1/2)v_1 = v_2 \sin \alpha$$

pontos egyenlőségbe megy át.

Nézzük meg, milyen feltétel következik (6)-ból a gyorsulásokra! Az előző gondolatmenetünket alkalmazva most a sebességek kis $\Delta t'$ idő alatti megváltozását vizsgáljuk. $\Delta t'$ elteltével (6) szerint a sebességek az

$$(7) \quad (1/2)(v_1 + \Delta v_1) = (v_2 + \Delta v_2) \sin(\alpha + \Delta\alpha')$$

egyenlőséget elégítik ki. Vonjuk ki ebből (6)-ot:

$$(8) \quad \begin{aligned} (1/2)\Delta v_1 &= \Delta v_2 \sin(\alpha + \Delta\alpha') + v_2 [\sin(\alpha + \Delta\alpha') - \sin \alpha] = \\ &= \Delta v_2 \sin(\alpha + \Delta\alpha') + v_2 \cos \alpha \sin \Delta\alpha' + v_2 \sin \alpha (\cos \Delta\alpha' - 1). \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy

$$(9) \quad \begin{aligned} \Delta v_1 &\cong a_1 \Delta t', \\ \Delta v_2 &\cong a_2 \Delta t', \end{aligned}$$

$$(10) \quad \frac{1}{2}a_1 \cong a_2 \sin(\alpha + \Delta\alpha') + v_2 \cos \alpha \frac{\sin \Delta\alpha'}{\Delta t'} - v_2 \sin \alpha \frac{1 - \cos \Delta\alpha'}{\Delta t'}.$$

A 2. ábráról leolvasható, hogy $\Delta t'$ idő alatt ($\Delta\alpha'$ szögváltozás esetén) a 2-es test

$$(11) \quad \Delta h_2 = d [\operatorname{tg}(\alpha + \Delta\alpha') - \operatorname{tg} \alpha] = d \frac{\sin \Delta\alpha'}{\cos(\alpha + \Delta\alpha') \cos \alpha}$$

távolságot ereszkedik, amely most

$$(12) \quad \Delta h_2 \cong v_2 \Delta t' \text{-vel}$$

helyettesíthető. (11) és (12) összevetéséből

$$(13) \quad \frac{\sin \Delta\alpha'}{\Delta t'} \cong \frac{v_2}{d} \cos(\alpha + \Delta\alpha') \cos \alpha$$

adódik. Ugyanakkor

$$(14) \quad \frac{1 - \cos \Delta\alpha'}{\Delta t'} \cong \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v_2 \cos(\Delta\alpha' + \alpha) \cos \alpha}{d} \cdot \Delta t' \right)^2}}{\Delta t'},$$

amely az elég kicsiny x -ekre használható

$$(15) \quad \sqrt{1 - x^2} = 1 - (1/2)x^2$$

közelítés segítségével (mindkét oldalt négyzetre emelve láthatjuk, hogy az eltérés $(1/4)x^4$, ami annál kisebb, minél kisebb az x és még a kicsiny $(1/2)x^2$ -nél is gyorsabban közeledik 0-hoz, ha x közeledik 0-hoz) az

$$(16) \quad \frac{1 - \cos \Delta\alpha'}{\Delta t'} \cong \frac{1}{2} \left(\frac{v_2 \cos(\alpha + \Delta\alpha') \cos \alpha}{d} \right)^2 \Delta t'$$

alakra hozható. (16)-ot és (13)-at behelyettesítjük (10)-be és felhasználjuk, hogy a (9), (12) és (15) egyenletek annál pontosabbak, minél kisebbre választjuk a $\Delta t'$ -t. Így végül azt kapjuk, hogy a gyorsulások között az

$$(17) \quad (1/2)a_1 = a_2 \sin \alpha + (v_2^2/d) \cos^3 \alpha$$

összefüggésnek kell fennállnia. (Megjegyezzük, hogy (17) nem független (6)-tól, hisz abból származtattuk, és végül is mindkettő ugyanazt a tényt, a kötél nyújthatatlanságát fejezi ki.)

(17)-ből kiolvasható, hogy a_1 és a_2 semmilyen $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ értékre nem lehet *egyszerre* nulla, hacsak nem $v_2 = 0$. Vizsgáljuk tehát a sebességeket! Ehhez legcélszerűbb az energiamegmaradás tételét használni. Ha a rendszert $\alpha = 0$ -ból kezdősebesség nélkül indítjuk, a testek helyzeti energiája

$$(18) \quad \Delta E_h = mg(h_2 - h_1) = mgd \left[\operatorname{tg} \alpha - 2 \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) \right]$$

értékkel csökken, a mozgási energia pedig

$$(19) \quad \Delta E_{\text{mozg}} = (1/2)m(v_1^2 + v_2^2)$$

értékkel nő, mialatt a kötél vízszintessel bezárt szöge 0° -ról α -ra nő. (18), (19), valamint (6) összevetéséből

$$(20) \quad v_2^2 = \frac{2dg \left[\operatorname{tg} \alpha - 2 \left(\frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \right) \right]}{1 + (2 \sin \alpha)^2}$$

adódik. Ebből látható, hogy α csak addig nőhet, amíg

$$(21) \quad \operatorname{tg} \alpha - 2 \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} = 0.$$

nem lesz. A (21) megoldásaként adódó α -nál $\Delta E_h = 0$, a rendszer összes energiája megint, ugyanúgy, ahogy az indulás pillanatában, helyzeti energia lesz, tehát a rendszer az $\alpha = 0$ és a (21) megoldásaként adódó α_v érték között rezeg. (21) a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} \quad \text{és} \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}$$

összefüggések felhasználásával a

$$(22) \quad \operatorname{tg}(\alpha_v/2) = 1/2$$

alakra hozható, ahonnan az

$$(23) \quad \alpha_v = 53,13^\circ$$

eredmény kapható. 0° és $53,13^\circ$ között $v_2 \neq 0$, tehát a két gyorsulás közül egyszerre csak az egyik lehet nulla.

$\alpha = 0$ -ban $v_2 = 0$ (így indítjuk a rendszert) és így a (17) összefüggésből $a_1 = 0$. (1) szerint ekkor $K = mg$, (tehát nem végtelen nagy), így (2)-ből $a_2 = g$ adódik.

A visszafordulás pontjában, α_v -nél megint $v_2 = 0$. (17), (1) és (2) egy háromismeretlenes egyenletrendszer, amelyből K -t kiküszöbölve

$$(24) \quad \begin{aligned} a_1 &= -0,27g \\ a_2 &= -0,17g \end{aligned}$$

kapható. Tehát itt sem lesz mindkét gyorsulás nulla (ezt egyébként tudhattuk volna előre: ha a gyorsulások is és a sebességek is nullák, a rendszer nyugalomban maradna, az viszont $\alpha = 30^\circ$ -nál lehet csak).

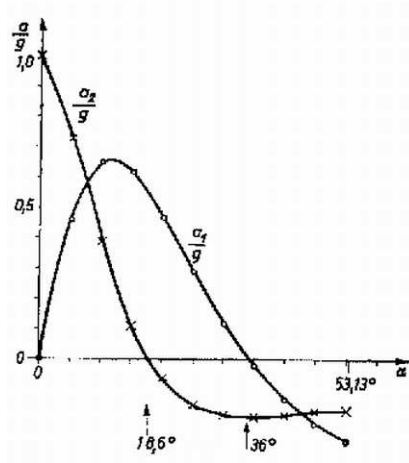
A válasz tehát az, hogy a feladatban leírt indítás esetén a rendszer rezgést végez, miközben α 0° és $53,13^\circ$ között változik. A mozgás folyamán nem fordul elő, hogy mindkét gyorsulás egyszerre lenne nulla.

(1), (2), (6), (17) és (20) egyébként egy olyan egyenletrendszert alkot, melyből a_1 , a_2 , v_1 és v_2 az α függvényében könnyen kiszámítható.

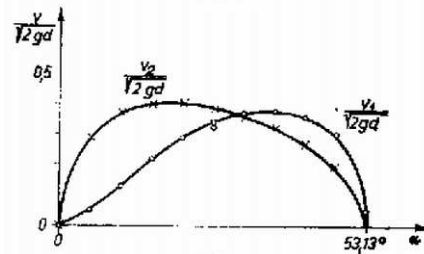
$$(25) \quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{g}{1 + 4 \sin^2 \alpha} \left\{ (1 - 2 \sin \alpha) 2 \sin \alpha + \frac{4 \cos^2 \alpha [\sin \alpha - 2(1 - \cos \alpha)]}{1 + 4 \sin^2 \alpha} \right\}; \\ a_2 &= \frac{g}{1 + 4 \sin^2 \alpha} \left\{ (1 - 2 \sin \alpha) - 2 \sin \alpha \frac{4 \cos^2 \alpha [\sin \alpha - 2(1 - \cos \alpha)]}{1 + 4 \sin^2 \alpha} \right\}; \end{aligned}$$

$$v_1 = \pm \sqrt{2dg} \cdot 2 \sin \alpha \sqrt{\frac{\sin \alpha - 2(1 - \cos \alpha)}{\cos \alpha (1 + 4 \sin^2 \alpha)}};$$

$$(26) \quad v_2 = \pm \sqrt{2dg} \sqrt{\frac{\sin \alpha - 2(1 - \cos \alpha)}{\cos \alpha (1 + 4 \sin^2 \alpha)}};$$



3. ábra



4. ábra

A sebességek előjele pozitív, ha α nő, és negatív, ha α csökken. A kapott görbéket mutatja a 3. és a 4. ábra. Ezekről leolvasható, hogy amikor

$$a_2 = 0, \text{ akkor } \alpha \cong 18,6^\circ, \quad v_1 \cong 0,41\sqrt{2gd}, \quad v_2 \cong 0,36\sqrt{2gd}, \quad a_1 \cong 0,55g,$$

és amikor

$$a_1 = 0, \text{ akkor } \alpha \cong 36^\circ, \quad v_1 \cong 0,38\sqrt{2gd}, \quad v_2 \cong 0,33\sqrt{2gd}, \quad a_2 \cong -0,19g.$$