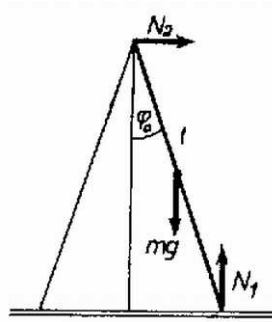


I. megoldás. Elegendő, ha csak a létra egyik szárának mozgását vizsgáljuk. Az l hosszú szárra az 1. ábrán feltüntetett erők hatnak. A talaj N_1 nyomóereje függőleges irányú, mert a súrlódás elhanyagolható, a másik szár által közvetített N_2 erő pedig a létra szimmetriája miatt csak vízszintes irányú lehet.



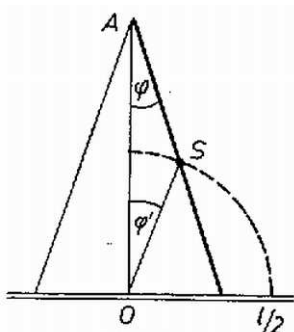
1. ábra

Legyen a szár szöggyorsulása β , a tömegközéppont gyorsulásának komponensei legyenek a_x és a_y . Írjuk fel a mozgásegyenleteket a tömegközéppontra:

$$\begin{aligned} (1) \quad & mg - N_1 = ma_y, \\ (2) \quad & N_2 = ma_x, \\ (3) \quad & N_1(l/2) \sin \varphi - N_2(l/2) \cos \varphi = \Theta_S \beta, \end{aligned}$$

ahol a tömegközéppontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték:

$$(4) \quad \Theta_S = (1/12)ml^2.$$



2. ábra

A következő lépés a gyorsulás komponensei és a szöggyorsulás közti kapcsolat meghatározása. Vegyük észre, hogy az S tömegközéppont az O pont körül egy $l/2$ sugarú körön mozog (2. ábra), mégpedig éppen azzal a β szöggyorsulással, mint a létra szára az S tömegközéppont körül. Az OSA háromszög ugyanis egyenlőszárú, ezért $\varphi(t) = \varphi'(t)$ minden időpillanatban, így második deriváltjuk, a szöggyorsulás is megegyezik. Így a_x és a_y a tömegközéppont O körüli körmozgásának kerületi gyorsuláskomponensei:

$$\begin{aligned} (5) \quad & a_x = \beta(l/2) \cos \varphi, \\ (6) \quad & a_y = \beta(l/2) \sin \varphi. \end{aligned}$$

A létra legfelső pontjának elmozdulása mindig kétszerese a súlypont függőleges elmozdulásának, ezért gyorsulása

$$(7) \quad a = 2a_y.$$

Az (1)–(7) egyenletrendszer megoldása:

$$(8) \quad a = (3/2)g \sin^2 \varphi.$$

Ha t sokkal kisebb, mint a létra tetejének földet éréséhez szükséges idő, akkor ezalatt φ nem sokat változik, és a gyorsulás közel állandónak tekinthető. (8) alapján az igen rövid idő alatt megtett út:

$$s = (1/2)at^2 = (3/4)gt^2 \sin^2 \varphi_0,$$

vagy $\varphi_0 = 15^\circ$ behelyettesítésével:

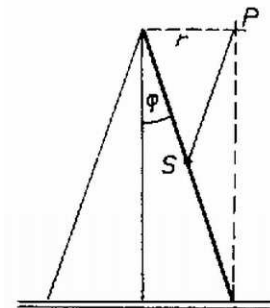
$$s = 0,5 \text{ (m/s}^2\text{)} \cdot t^2,$$

Kávássy Lóránd (Kecskemét, Katona J. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. A forgómozgás egyenletét a tömegközépponton kívül a pillanatnyi forgástengelyre is fel tehet írni. A létra szára a 3. ábrán feltüntetett P pont körül fordul el. (P a szár végpontjainak elmozdulására merőlegesen állított egyenesek metszéspontja.) A P pont természetesen „vándorol” a mozgás során. A pillanatnyi forgástengelyre vonatkoztatva a létra szára csak forgómozgást végez:

$$(9) \quad \begin{aligned} M &= \Theta\beta, \\ (1/2)mgl \sin \varphi &= \Theta\beta. \end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy az N_1 és N_2 erők hatásvonala keresztülhalad P ponton, így nincs forgatónyomatékuk.



3. ábra

A pillanatnyi forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték a Steiner-tétel alapján:

$$(10) \quad \Theta = \Theta_s + m(l/2)^2 = (1/3)ml^2.$$

A felső végpont gyorsulása (l. a 3. ábrát)

$$a = r\beta = Bl \sin \varphi.$$

(9) és (10) behelyettesítésével

$$a = (3/2)g \sin^2 \varphi.$$

A rövid idő alatti elmozdulás az előző megoldással egyezően így

$$s = (3/4)gt^2 \sin^2 \varphi_0.$$

Kolláth Zoltán (Törökszentmiklós, Bercsényi M. Gimn., III. o. t.)

III. megoldás. Alkalmazzuk az energiamegmaradás tételét! Ismét elegendő a létra egyik szárát vizsgálni. Ha a létra teteje s utat tesz meg, szárának tömegközéppontja $(s/2)$ -vel kerül lejjebb. A potenciális energia változása

$$(11) \quad \Delta U_{pot} = mgs/2,$$

a mozgási energia növekedése

$$(12) \quad \Delta U_{kin} = (1/2)\Theta_S \omega^2 + (1/2)mv^2.$$

Az első megoldásban a kényszerfeltétel keresésekor bizonyítottuk, hogy az S tömegközéppont O pont körüli forgómozgását ugyanaz a $\varphi(t)$ függvény írja le, mint ami a létra szárának súlypont körüli elfordulását. Emiatt

$$(13) \quad v = (l/2)\omega.$$

Az energiamegmaradás törvénye alapján $\Delta U_{pot} = \Delta U_{kin}$

$$(1/2)mgs = (1/2) \cdot (1/3)m(l/2)^2 \omega^2 + (1/2)mv^2,$$

ahonnan (13) felhasználásával

$$(14) \quad v = \sqrt{(3/4)gs}.$$

A súlypont elmozdulásának függőleges sebességkomponense: $v_y = v \sin \varphi$, a létra csúcsának sebessége pedig s út megtétele után:

$$(15) \quad v_A = 2v_y = 2v \sin \varphi = \sqrt{3gs} \sin \varphi.$$

t sokkal kisebb, mint a földetéréshez szükséges idő, ezért a legfelső pont gyorsulását ezalatt állandónak tekinthetjük. Egyenletesen gyorsuló mozgásnál

$$s = \frac{v_A t}{2},$$

azaz (15) alapján

$$s = \frac{\sqrt{3gs}}{2} t \sin \varphi_0, \quad \text{így} \quad s = (3/4)gt^2 \sin^2 \varphi_0.$$

Umann Gábor (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)