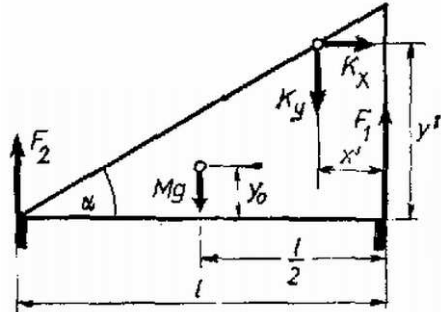


**I. megoldás.** Mivel a lejtő nincs kitámasztva, és a talaj mentén a súrlódás elhanyagolható, a lejtő is mozogni fog. A lábknál ható erők megadásához két adat szükséges: a henger lejtőhöz viszonyított helyzete az idő függvényében, valamint a lejtőre ható erő a henger érintkezési pontjánál. Az 1. ábrán a henger lejtőhöz viszonyított helyzetét az  $x'$ ,  $y'$  koordinátákkal; a lejtőre gyakorolt erőt a  $K_x$ ,  $K_y$  komponensekkel jelöltük.



1. ábra

A lejtő függőlegesen nem gyorsul, tehát

$$(1) \quad Mg + K_y = F_1 + F_2,$$

ahol  $F_1$  a magas oldalon,  $F_2$  az alacsony oldalon levő lábknál ható erők eredője. A lejtő nem fordul el, ezért a *tömegközéppontra* felírt forgatónyomatékok eredője nulla. (Mivel a lejtő vízszintesen gyorsul, a forgatónyomatékokat nem lehet önkényesen megválasztott pontra felírni. Merev testeknél a tömegközéppontra felírt forgatónyomaték tetszőleges mozgásnál helyes eredményt ad – 1. Budó: Mechanika 28.§ és 49.§.) Ha a lejtő tömegközéppontja  $y_0$  magasságban van – az  $l$  hosszúságú alaplap mentén közepén –, akkor a forgatónyomatékok eredője:

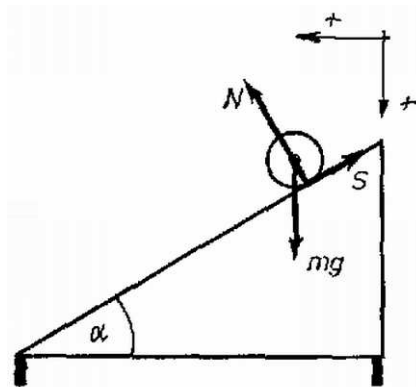
$$(2) \quad (l/2)F_2 + K_x(y' - y_0) + K_y[(l/2) - x'] - (l/2)F_1 = 0.$$

Az (1) és (2) egyenletekből a lejtő magas oldalán levő egy-egy lábknál ébredő erők:

$$(3) \quad \frac{1}{2}F_1 = \frac{1}{4}Mg + \frac{1}{2}K_x \frac{y' - y_0}{l} + \frac{1}{2}K_y \frac{l - x'}{l},$$

míg a másik oldalon

$$(4) \quad \frac{1}{2}F_2 = \frac{1}{4}Mg - \frac{1}{2}K_x \frac{y' - y_0}{l} + \frac{1}{2}K_y \frac{x'}{l}.$$



2. ábra

Az erők és a gyorsulások meghatározásához vizsgáljuk először a henger mozgását. A 2. ábrán a hengerre ható erők és a gyorsulásoknál használt pozitív irányok vannak feltüntetve. A lejtő nyomóereje merőleges a lejtő síkjára (tehát  $N_x = N \sin \alpha$ ,  $N_y = N \cos \alpha$ ), viszont  $|N| \neq mg \cos \alpha$ , mert *álló koordináta-rendszerben* a henger *lejtőirányú* elmozdulása a lejtő mozgása miatt azt jelentené, hogy a henger elhagyja a lejtőt.

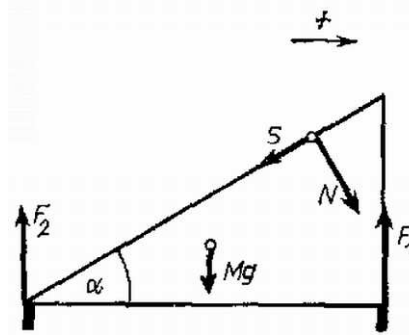
A mozgásegyenletek:

$$\begin{aligned} (5) \quad & ma_x = N_x - S_x = N \sin \alpha - S \cos \alpha, \\ (6) \quad & ma_y = mg - N_y - S_y = mg - N \cos \alpha - S \sin \alpha, \\ (7) \quad & \Theta \beta = (1/2)mr^2\beta = Sr. \end{aligned}$$

Ha a henger csúszva gördül, akkor a súrlódási erő:

$$(8) \quad S = \mu N,$$

míg tökéletes gördülésnél  $S < \mu N$ , és ekkor a súrlódási erő értékét a gördülés kényszerfeltételéből lehet meghatározni.



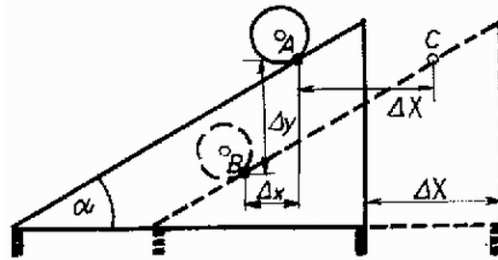
3. ábra

A hengerre ható erők ellenereje a 3. ábrán látható. A lejtő vízszintes gyorsulását ( $A_x$ ) az ábrán feltüntetett előjellel tekintjük pozitívnak. A lejtőre ható erők a henger érintkezési pontjánál:

$$\begin{aligned} (9) \quad & K_x = N_x - S_x = N \sin \alpha - S \cos \alpha, \\ (10) \quad & K_y = N_y + S_y = N \cos \alpha + S \sin \alpha. \end{aligned}$$

A mozgásegyenlet:

$$(11) \quad MA_x = N_x - S_x = N \sin \alpha - S \cos \alpha.$$



4. ábra

A kényszerfeltételek meghatározásához a 4. ábrá felrajoltuk a henger és a lejtő helyzetét két egymást követő pillanatban. Mivel a henger a lejtőn marad,  $\Delta y = (\Delta x + \Delta X) \operatorname{tg} \alpha$ , ezt az összefüggést az idő szerint kétszer deriválva az

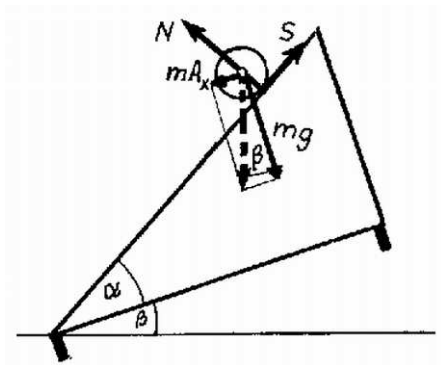
$$(12) \quad a_y = (a_x + A_x) \operatorname{tg} \alpha$$

kényszerfeltételt kapjuk. Tökéletes gördülésnél, ha a henger a két helyzet között  $\Delta \varphi$  szögelfordulást végez, a henger kerületének  $r\varphi$  szakasza megegyezik a  $CB$  távolsággal (a  $C$  pontnak megfelelő helyről indult és a  $B$  pontba érkezett)

$$r\varphi = \frac{\Delta x + \Delta X}{\cos \alpha};$$

ebből kétszeri deriválással:

$$(13) \quad r\beta = \frac{a_x + A_x}{\cos \alpha}.$$



5. ábra

Néhány átrendezést meg lehet tenni a csúszva gördülés és a tisztán gördülés esetének szétválasztása előtt. A (6) és (11) egyenlet összehasonlításából:

$$(14) \quad A_x = \frac{m}{M} a_x,$$

így a „lejtőn maradás” kényszerfeltétele (12) alapján

$$(15) \quad a_y = a_x [1 + (m/M)] \operatorname{tg} \alpha.$$

Csúszás esetén az (5), (6), (8) és (15) egyenletek egyszerű egyenletrendszert alkotnak, amelynek megoldása:

$$(16) \quad a_x = \frac{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \cos \alpha}{1 + (m/M) - (m/M) \cos \alpha (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)},$$

$$(17) \quad N = \frac{mg \cos \alpha}{1 + (m/M) - (m/M) \cos \alpha (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)}.$$

(Vegyük észre, hogy  $M \gg m$  esetén valóban visszakapjuk az álló lejtőnél várt eredményt.)

A henger lejtőhöz viszonyított helyzetének meghatározásához az  $x' = (1/2)(a_x + A_x)t^2$  relatív elmozdulást a (14), az  $y' = l \sin \alpha - (1/2)a_y t^2$  távolságot a (15), a lejtőre ható erőket a (8) és a (9), (10) egyenletekbe való egyszerű behelyettesítéssel kapjuk:

$$x' = \frac{1}{2} \cdot \frac{gt^2(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \cos \alpha}{1 + (m/M) - (m/M) \cos \alpha (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} [1 + (m/M)],$$

$$y' = l \sin \alpha - x' \operatorname{tg} \alpha,$$

$$K_x = \frac{mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \cos \alpha}{1 + (m/M) - (m/M) \cos \alpha (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)},$$

$$K_y = \frac{mg(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) \cos \alpha}{1 + (m/M) - (m/M) \cos \alpha (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)}.$$

A lejtő lábainál ható erők ezek ismeretében, (3) és (4) alapján:

$$(18) \quad \frac{1}{2} F_1 = \frac{1}{4} Mg + \frac{1}{2} \frac{mg \cos \alpha}{1 + (m/M) - (m/M) \cos \alpha (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} \cdot \left\{ (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \left[ \sin \alpha - \frac{[gt^2/(2l)] (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \sin \alpha [1 + (m/M)]}{1 + (m/M) - (m/M) \cos \alpha (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} - \frac{y_0}{l} \right] + (\cos \alpha + \mu \sin \alpha) \left[ 1 - \frac{[gt^2/(2l)] (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \cos \alpha [1 + (m/M)]}{1 + (m/M) - (m/M) \cos \alpha (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} \right] \right\},$$

$$(19) \quad \frac{1}{2} F_2 = \frac{1}{4} Mg + \frac{1}{2} \frac{mg \cos \alpha}{1 + (m/M) - (m/M) \cos \alpha (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} \cdot \left\{ (\mu \cos \alpha - \sin \alpha) \left[ \sin \alpha - \frac{[gt^2/(2l)] (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \sin \alpha [1 + (m/M)]}{1 + (m/M) - (m/M) \cos \alpha (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} - \frac{y_0}{l} \right] + (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) \frac{[gt^2/(2l)] (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \cos \alpha [1 + (m/M)]}{1 + (m/M) - (m/M) \cos \alpha (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} \right\}.$$

Tökéletes gördülésnél a súrlódási erőt a (8) egyenlet helyett a (1) kényszerfeltételből és a forgómozgást leíró (7) egyenletből kell meghatározni:

$$(20) \quad S = \frac{1}{2} m \frac{a_x + A_x}{\cos \alpha} = \frac{1}{2} \frac{m a_x}{\cos \alpha} \left( 1 + \frac{m}{M} \right).$$

A csúszásmentesen gördülő henger mozgását leíró (5), (6), (15) és (20) egyenletek megoldása:

$$(21) \quad a_x = \frac{(2/3)g \sin \alpha \cos \alpha}{1 + (m/M) - (2/3)(m/M) \cos^2 \alpha};$$

$$(22) \quad a_y = \frac{(2/3)g \sin^2 \alpha [1 + (m/M)]}{1 + (m/M) - (2/3)(m/M) \cos^2 \alpha};$$

$$(23) \quad S = \frac{1}{3} \frac{mg \sin \alpha [1 + (m/M)]}{1 + (m/M) - (2/3)(m/M) \cos^2 \alpha};$$

$$(24) \quad N = \left( 1 + \frac{m}{3M} \right) \frac{mg \cos \alpha}{1 + (m/M) - (2/3)(m/M) \cos^2 \alpha}.$$

Az  $x'$ ,  $y'$  koordináták, valamint  $K_x$  és  $K_y$  meghatározása  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $S$  és  $N$  ismeretében ugyanúgy történik, mint az előbb. Ha ezeket kiszámoltuk, (3)-ba és (4)-be helyettesítve tisztán gördülés esetén a végeredmény:

$$(25) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} F_1 &= \frac{1}{4} Mg + \frac{1}{3} \cdot \frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{1 + (m/M) - (2/3)(m/M) \cos^2 \alpha} \\ &\cdot \left\{ \sin \alpha - \frac{1}{3l} \cdot \frac{gt^2 \sin^2 \alpha [1 + (m/M)]}{1 + (m/M) - (2/3)(m/M) \cos^2 \alpha} - \frac{y_0}{l} + \left[ \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{m}{3M} \right) \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{m}{M} \right) \operatorname{tg} \alpha \right] \right. \\ &\quad \left. \cdot \left( 1 - \frac{1}{3l} \frac{gt^2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + (m/M) - (2/3)(m/M) \cos^2 \alpha} \right) \right\}; \\ \frac{1}{2} F_2 &= \frac{1}{4} Mg + \frac{1}{3} \frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{1 + (m/M) - (2/3)(m/M) \cos^2 \alpha} \\ &\cdot \left\{ \frac{1}{3l} \frac{gt^2 \sin^2 \alpha [1 + (m/M)]}{1 + (m/M) - (2/3)(m/M) \cos^2 \alpha} + \frac{y_0}{l} - \sin \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{m}{3M} \right) \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{m}{M} \right) \operatorname{tg} \alpha \right] \frac{1}{3l} \frac{gt^2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + (m/M) - (2/3)(m/M) \cos^2 \alpha} \right\}. \quad (26) \end{aligned}$$

Tökéletes gördülés akkor jön létre, ha a súrlódási együttható egy kritikus,  $\mu_0$  értéknél nagyobb. A kritikus súrlódási együtthatót legegyszerűbben abból a feltételből határozhatjuk meg, hogy ha  $\mu = \mu_0$ , akkor a „csúszva gördüléshez” és a tökéletes gördüléshez tartozó gyorsulásértékek megegyeznek. (16) és (21) egyenlővé tételével  $\mu_0$ -ra egyenletet kapunk, aminek megoldása:

$$(27) \quad \mu_0 = \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha \frac{1 + (m/M)}{1 + [m/(3M)]}.$$

Mint minden korábbi kifejezés, ez is visszaadja a várt eredményt  $M \gg m$  esetén.

*Összefoglalva:* a lejtő lábánál fellépő erők az idő függvényében olyan parabolaívvel ábrázolhatók, amelyek paramétereit a  $\mu \leq \mu_0$  esetben a (18), (19); a  $\mu \geq \mu_0$  esetben a (25), (26) egyenletek adják meg.

**II. megoldás.** Az előző megoldás hosszadalmas (elsősorban a sokismeretlenes egyenletrendszerek megoldása miatt), azonban kellő türelemmel különösebb nehézség nélkül végigszámolható. Az alábbi megoldásban – ahol a lejtővel együtt gyorsuló koordináta-rendszerben számolunk – a számolási munka lényegesen kevesebb, de több buktatóval találkozhatunk.

A gyorsuló koordináta-rendszerre vonatkozó mennyiségeket  $'$ -vel jelöljük. A hatás-ellenhatás törvénye alapján tudjuk, hogy álló rendszerben  $ma_x = MA_x$ , azaz a lejtővel együtt gyorsuló rendszerben a henger gyorsulása:

$$(1) \quad a'_x = a_x + A_x = [(M/m) + 1] A_x.$$

A gyorsuló koordináta-rendszer nem inerciarendszer, de az ún. tehetetlenségi erők bevezetésével alkalmazhatók a Newton-törvények. (Gyorsuló rendszerről 1.: Budó–Pócza: Kísérleti Fizika I. rész. F. fejezet.) Az  $A_x$  gyorsulással mozgó rendszerben a  $m$  tömegű hengerre  $-mA_x$ , a lejtőre  $-MA_x$  tehetetlenségi erő hat, amelyek támadáspontja az egyes testek tömegközéppontja. A gyorsuló koordináta-rendszerben a hengerre ható erők az 5. ábrán láthatók. Az ábra alapján megállapíthatjuk, hogy a henger úgy fog mozogni, mintha egy  $\alpha' = \alpha + \beta$  hajlásszögű lejtőn  $g' = g/\cos \beta$  nehézségi gyorsulású térben lenne, ahol

$$(2) \quad \operatorname{tg} \beta = A_x/g.$$

A közismert eredmények felhasználásával, csúszásnál

$$(3a) \quad a' = g'(\sin \alpha' - \mu \cos \alpha'),$$

illetve tökéletes gördülésnél

$$(3b) \quad a' = (2/3)g' \sin \alpha'$$

a henger lejtő irányú gyorsulása. Az alaplappal párhuzamos komponens mindkét esetben:  $a'_x = a' \cos \alpha$ . Az  $\alpha' = \alpha + \beta$  és  $g' = g / \cos \beta$  behelyettesítésével:

$$(4a) \quad a'_x = g \cos \alpha [\sin \alpha - \mu \cos \alpha + \operatorname{tg} \beta (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)],$$

illetve

$$(4b) \quad a'_x = (2/3)g \cos \alpha (\sin \alpha + \operatorname{tg} \beta \cos \alpha).$$

(1) és (2) alapján  $\operatorname{tg} \beta = \frac{a'_x}{(M/m) + 1}$ . Ezt a fenti kifejezésekbe behelyettesítve *egyismeretlenes* egyenletet kapunk  $a'_x$ -re.

A megoldás:

$$(5a) \quad a'_x = \frac{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \cos \alpha [1 + (m/M)]}{1 + (m/M) - (m/M) \cos \alpha + \mu \sin \alpha},$$

illetve

$$(5b) \quad a'_x = \frac{(2/3)g \sin \alpha \cos \alpha [1 + (m/M)]}{1 + (m/M) - (2/3)(m/M) \cos^2 \alpha}$$

(valóban megegyezik az I. megoldás  $a_x + A_x = [1 + (m/M)] a_x$  értékével). A függőleges komponens mindkét esetben  $a'_y = a'_x \operatorname{tg} \alpha$ .

A lejtőre a hengerre ható erők ellenereje hat. Mivel a henger vízszintes gyorsulása  $a'_x$ ;  $|K_x| = ma'_x$ , és mivel a függőleges gyorsulása  $a'_y$ ;  $|K_y| = m(g - a'_y) = m(g - a'_x \operatorname{tg} \alpha)$ . A lábknál ható erők meghatározásához felírandó egyenletek ugyanazok, mint az első megoldás (1) – (2) egyenletei. (Ha nem feledkezünk meg a gyorsuló koordináta-rendszerben a lejtő tömegközéppontjában ható  $-MA_x$  tehetetlenségi erőről, akkor ebben a rendszerben a forgatónyomaték már tetszőleges pontra felírható.)

Az eredményben szereplő mennyiségek ( $K_x$ ,  $K_y$ ,  $x' = (1/2)a'_x t^2$  és  $y' = l \sin \alpha - (1/2)a'_x \operatorname{tg} \alpha \cdot t^2$ ) csak  $a'_x$ -t tartalmaznak paraméterként, amit a csúszás, illetve a gördülés esetére az (5) egyenletben már kiszámoltunk. A helyettesítés után kapott eredmény természetesen megegyezik az I. megoldás végeredményével.

**Mihály György**