I. megoldás. A rakéta mozgásegyenlete:

$$(m_0 - kt)a = F_t - Fk - G, \tag{1}$$

ahol m_0 a kezdeti tömeg, k a másodpercenkénti tömegcsökkenés, F_t a tolóerő, F_k a közegellenállási erő, G pedig a súlyerő. Tegyük fel, hogy $F_k \approx 0$, és hogy G nem függ a helytől. Nyilvánvaló, hogy a rakéta gyorsulása időben változik, tehát az állandó gyorsulás esetén kapott összefüggéseket nem használhatjuk az (1) egyenlet megoldására. Oldjuk meg tehát a feladatot numerikusan. Az alapötlet az, hogy olyan kis szakaszokra bontjuk fel a mozgást, amely szakaszokon belül a gyorsulás már jó közelítéssel állandónak tekinthető, és ezeken a szakaszokon belül a jól ismert képleteket alkalmazhatjuk. A számolás egy lehetséges menete tehát a következő: n egyenlő részre osztjuk a $T = 150$ s repülési időt ($\Delta t = T/n$); a $0, \Delta t \ldots (n-1)\Delta t$ pillanatokban kiszámoljuk a-t, ennek segítségével a Δt idő múlva elért sebességeket:

$$v_i = v_{i-1} + a_{i-1}\Delta t; \qquad 1 \le i \le n, \tag{2}$$

majd az egyes időintervallumok alatt megtett utakat

$$s_i = \frac{v_{i-1} + v_t}{2}\Delta t.$$

Az elért magasság az összes s_i út összege. Ily módon számolva $\Delta t = 10$ s; 2 s; 1 s; 0,2 s felosztásokat használva a rakéta által elért magasság: 75 158 m, 80 933 m, 81 700 m, ill. 82 322 m, és a végsebesség: 1691 m/sec, 1834 m/sec, 1853 m/sec, ill. 1868 m/sec. Látható, hogy a $\Delta t \le 2$ s választás ad kielégítő eredményt. Lecsökkenthetjük azonban a számolási időt, ha reálisabb gyorsulási értéket rendelünk az egyes szakaszokhoz. Végezzük el az előző számolást azzal a különbséggel, hogy (2) helyett a következő kifejezést használjuk:

$$v_i = v_{i-1} + \frac{a_{i-1} + a_i}{2}\Delta t. \tag{2'}$$

Az I. táblázatban megadott értékeket $\Delta t = 10$ s esetén kaptuk.

Idő (s)	20	40	60	80	100	120	140	150
Sebesség (m/s)	53,8	137	259	431	673	1 017	1 525	1 880
Út (m)	503	2 372	6 287	13 126	24 079	40 834	66 001	83 022

Láthatjuk tehát, hogy a számolási időt kb. tizedrészére csökkenthettük a közelítés pontosításával.

Becsüljük meg a kezdeti feltevéseink által okozott hibát. 80 km magasan a nehézségi gyorsulás kb. 3%-kal kisebb, mint a földfelszínen. Mivel ebben a magasságban a rakéta gyorsulása közelítőleg 40 m/s^2, így a földfelszíni g használata folytán (1) jobb oldalának kiszámításában elkövetett hiba $< 1\%$.

Most indokoljuk meg az $F_k \approx 0$ közelítést. Tegyük fel, hogy a közegellenállás

$$F_k = (1/2)cA\varrho v^2$$

alakban adható meg, hol c az alakfaktor, A a keresztmetszet, ϱ pedig a levegő sűrűsége. Kis sebességeknél tehát F_k valóban kicsi, pl. 137 m/s-nál 2 km magasságban $F_k \approx 0{,}002\,F_t\,(c = 0{,}1,\ \ A = 75\ \mathrm{m}^2)$. Nagy sebességek elérésekor viszont a rakéta már magasan lesz, ahol a levegő sűrűsége kicsi $\left[\varrho \sim \varrho_0 \exp(-h)\right]$, és így pl. 40 km magasan, ahol a sebesség már ≈ 1000 m/s, $F_k \approx 7 \cdot 10^{-4}\,F_t$. A közbenső szakaszon az F_k-nak maximuma van: $F_k \approx 5 \cdot 10^{-3}\,F_t$ tehát az elhanyagolás jogos.

II. megoldás. Az előző megoldásban használt közelítésekkel az (1) egyenletet analitikusan is megoldhatjuk. (1) idő szerinti integrálásával kapjuk a sebességet (figyelembe véve, hogy $t = 0$ esetén $v = 0$):

$$v = (F_i/k)\ln\left[1 - (k/m_0)t\right] - gt,$$

majd ezt ismét idő szerint integrálva $\big(s(0) = 0$ figyelembevételével$\big)$ kapjuk az útfüggvényt:

$$s = \frac{F_i m_0}{k^2}\left(1 - \frac{k}{m_0}t\right)\ln\left(1 - \frac{k}{m_0}t\right) + \frac{F}{k}t - \frac{g}{2}t^2.$$

Az utóbbi integráláshoz felhasználtuk az

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x = x\ln x - x$$

összefüggést.

Ugyanazon adatokat behelyettesítve, mint előbb:

$$v_{150} = 1872\ \mathrm{m/s},$$
$$s_{150} = 82\,484\ \mathrm{m}.$$

Márk Géza (Budapest, Könyves K. Gimn., IV. o. t.)
Liszkay László (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)
dolgozata alapján