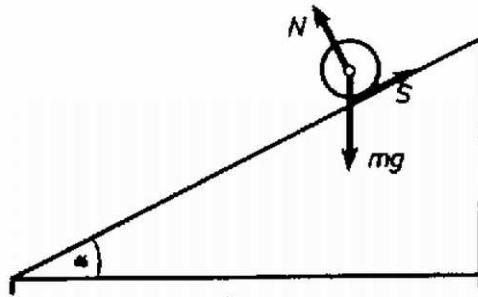
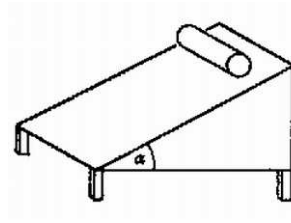


A lejtőn guruló hengerre az mg súlyerőn kívül a lejtő merőleges nyomóereje (N) és az S súrlódási erő hat (1. ábra).



1. ábra

Mivel a henger lejtőirányú mozgást végez, e három erő eredőjének lejtőirányúnak kell lennie, azaz

$$(1) \quad N = mg \cos \alpha.$$

A haladó mozgást leíró egyenlet

$$(2) \quad mg \sin \alpha - S = ma,$$

míg a középpont körüli forgómozgást az

$$M = \Theta \beta$$

azaz

$$(3) \quad Sr = (1/2)mr^2\beta$$

összefüggés határozza meg.

A súrlódási együttható értékétől függően két eset lehetséges: *a)* a henger tisztán gördül, *b)* a henger csúszva gördül.

Nézzük először az első esetet. Ekkor a haladó mozgás gyorsulása és a forgás szöggyorsulása között meghatározott összefüggés van:

$$(4) \quad a = r\beta.$$

A (4) kényszerfeltétellel a (2) és (3) egyenletek megoldása:

$$(5) \quad a = (2/3)g \sin \alpha,$$

$$(6) \quad S = (1/3)mg \sin \alpha.$$

A súrlódási erő így kapott értékének teljesítenie kell az

$$(7) \quad S \leq \mu N$$

feltételt. Ha ez igaz, azaz

$$(8) \quad (1/3)mg \sin \alpha \leq \mu mg \cos \alpha, \\ \mu \geq (1/3)\tan \alpha,$$

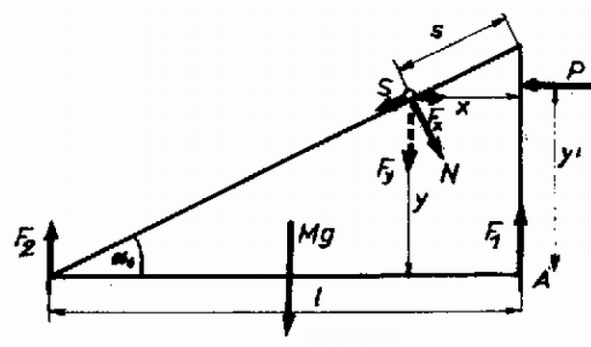
akkor a henger tökéletesen gördülve halad végig a lejtőn.

Ennél kisebb súrlódási együtthatók mellett a henger csúszva gördül. Ekkor a (4) kényszerfeltétel nem teljesül. A súrlódási erőről viszont tudjuk, hogy csúszásnál felveszi maximális értékét:

$$(9) \quad S = \mu N = \mu mg \cos \alpha,$$

és a tömegközéppont gyorsulása (2) alapján

$$(10) \quad a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$



2. ábra

Vizsgáljuk a lejtőre ható erőket! Ha a henger középen gördül, a lejtő magasabb, illetve alacsonyabb oldalának két-két lábán ugyanakkora erő hat. Ezek eredőjét jelöljük F_1 gyel, ill. F_2 -vel (2. ábra). A lábknál ható erők függőleges irányúak, hiszen a „talaj igen sima” – a súrlódás elhanyagolható.

A henger érintkezési pontjánál a lejtőre a nyomóerő és a súrlódási erő ellenereje hat. Ezek eredőjének függőleges komponense:

$$(11) \quad F_y = mg \cos^2 \alpha + S \sin \alpha,$$

vízszintes komponense

$$(12) \quad F_x = mg \cos \alpha \sin \alpha - S \cos \alpha.$$

A lejtőre hat még a saját súlya, amelynek nagysága Mg ; valamint a magas oldal kitámasztásánál a lejtő elmozdulását megakadályozó P nagyságú erő, aminek támadáspontját jellemezzük az y' magassággal (2. ábra).

A lejtő akkor van egyensúlyban, ha az erők és a forgatónyomatékok eredője nulla. Az erők komponenseire felírható egyenletek:

$$(13) \quad Mg + F_y = F_1 + F_2,$$

$$(14) \quad F_x = P.$$

Jellemezzük a henger helyzetét a 2. ábrán feltüntetett x és y koordinátákkal, majd írjuk fel az A pontra vonatkoztatott forgatónyomatékok eredőjét (a lejtő alapja l hosszú):

$$(15) \quad Mg(l/2) + F_y x + P y' - F_2 l - F_x y = 0.$$

A (13), (14) és (15) egyenletek megoldása:

$$(16) \quad F_1 = (Mg/2) + F_y[1 - (x/l)] + F_x(y - y')/l,$$

$$(17) \quad F_2 = (Mg/2) + F_y(x/l) - F_x(y - y')/l.$$

A feladat kitűzéséből nem egyértelmű, hogy a kitámasztást hogyan végezzük. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a P erővel mindig a hengerrel egyforma magasságban hatunk. Ekkor a (16) és (17) egyenletek utolsó tagja nulla.

Ha a henger a lejtő tetejéről kezdősebesség nélkül indul, akkor az általa megtett út $s = (1/2)at^2$ és $x = s \cos \alpha$.

Ha $\mu \geq (1/3)\tan \alpha$, a henger tisztán gördül és az (5), (6) összefüggéseket kell alkalmazni. (11) és (12) felhasználásával (16) és (17) alapján a lejtő magas oldalán levő lábknál fellépő erő:

$$F_1/2 = Mg/4 + (mg/2)[\cos^2 \alpha + (1/3)\sin^2 \alpha][1 - (1/3)(gt^2/l)\sin \alpha \cos \alpha],$$

míg a másik oldalon

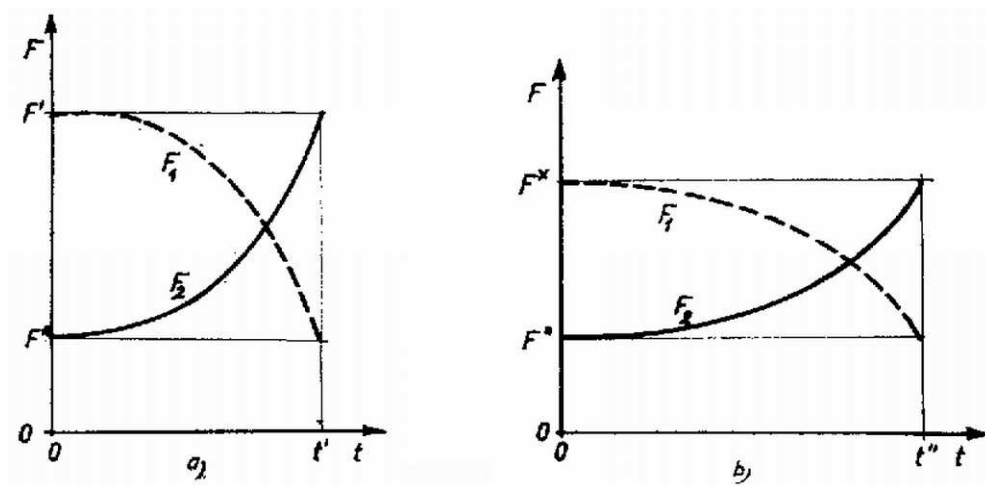
$$F_2/2 = (Mg/4) + (mg/2)[\cos^2 \alpha + (1/3)\sin^2 \alpha](1/3)(gt^2/l)\sin \alpha \cos \alpha.$$

Csúsza gördülésnél $[\mu < (1/3)\tan \alpha]$ a (9) és (10) összefüggéseket kell behelyettesíteni. Ekkor:

$$F_1/2 = (Mg/4) + (mg/2)(\cos^2 \alpha + \mu \cos \alpha \sin \alpha)[1 - (gt^2/l)\cos \alpha(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)];$$

$$F_2/2 = (Mg/4) + (mg/2)(\cos^2 \alpha + \mu \cos \alpha \sin \alpha)(gt^2/l)(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)\cos \alpha.$$

A 3. ábrán az erőket az idő függvényében ábrázoltuk; F_1 -et szaggatott, F_2 -t folytonos vonallal. Valamennyi görbe parabolaív.



3. ábra

Pálinkás István (Szolnok, Versegly F. Gimn., III. o. t.)
dolgozata alapján