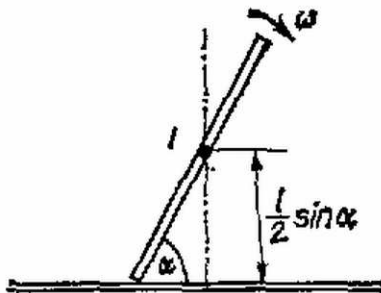


Az ábráról leolvasható a pálca helyzeti energiájának változása: $mg(l/2)(1 - \sin \alpha)$, így v -vel a tömegközéppont sebességét, ω -val a forgás szögsebességét jelölve a mechanikai energia megmaradási egyenlete:

$$(1) \quad mg(l/2)(1 - \sin \alpha) = (1/2)mv^2 + (1/2)(1/12)ml^2 \cdot \omega^2.$$

Ha súrlódás nincs, a rúdra ható erőknek nincs vízszintes komponensük. Ekkor a tömegközéppont vízszintesen nem mozdul el. Ezért v függőleges irányú és

$$v = dh/dt = d[(l/2) \sin \alpha]/dt = (l/2) \cos \alpha \cdot d\alpha/dt.$$



Figyelembe véve, hogy α és ω irányítása ellentétes az ábrán: $\omega = -(d\alpha/dt)$, tehát:

$$(2) \quad v = -(l/2)\omega \cdot \cos \alpha.$$

Ezt (1)-be helyettesítve kapjuk:

$$(3) \quad \omega^2 = \frac{12g}{l} \cdot \frac{1 - \sin \alpha}{1 + 3 \cos^2 \alpha}.$$

A szöggyorsulás $\beta = d\omega/dt$. Célszerűbb azonban a (3) kifejezés idő szerinti deriváltját képezni β kiszámításához.

$$2\omega \frac{d\omega}{dt} = \frac{12g}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{1 - \sin \alpha}{1 + 3 \cos^2 \alpha} \right) = \frac{12g}{l} \frac{\cos \alpha}{1 + 3 \cos^2 \alpha} \left[1 + \frac{6 \sin \alpha (1 - \sin \alpha)}{1 + 3 \cos^2 \alpha} \right] \omega,$$

azaz

$$(4) \quad \beta = \frac{6g}{l} \frac{\cos \alpha}{1 + 3 \cos^2 \alpha} \left[1 + \frac{6 \sin \alpha (1 - \sin \alpha)}{1 + 3 \cos^2 \alpha} \right].$$

A talaj elérésekor ($\alpha = 0$) a rúd szögsebessége (3)-ból

$$(5) \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

Czuczor Lajos (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Legtöbbször akkor követtek el hibát, amikor azt feltételezték, hogy a tömegközéppont gyorsulása és a szöggyorsulás között a (2)-höz hasonló $\alpha = -(l/2) \cos \beta$ egyenlet áll fenn. A sebességek és a gyorsulások közti kényszerkapcsolatok általában csak akkor azonos alakúak, ha a sebesség és a szögsebesség között állandó együtthatós lineáris kapcsolat van. Esetünkben viszont α függ az időtől. A gyorsulásokra vonatkozó feltételt (2) deriválásával nyerjük:

$$\alpha = dv/dt = (l/2)(d\alpha/dt) \cdot \omega \sin \alpha - (l/2)(d\omega/dt) \cos \alpha = -(l/2)\omega^2 \sin \alpha - (l/2)\beta \cos \alpha.$$