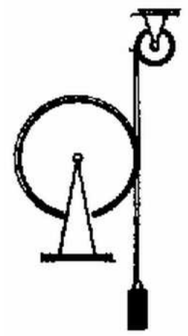


I. megoldás. Használjuk az 1447. feladat megoldásának jelöléseit (l. az 1. ábrát)! Az egyes testek mozgásegyenlete ugyanaz, mint az 1447. feladatban:

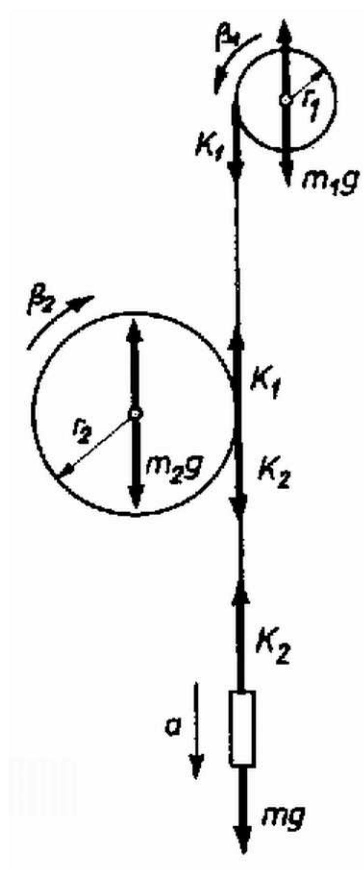
(1) $$ma = mg - K_2,$$

(2) $$[(1/2)m_1r_1^2]\beta_1 = K_1r_1,,$$

(3) $$[(1/2)m_2r_2^2]\beta_2 = Sr_2 = (K_2 - K_1)r_2,$$

és továbbra is fennáll az a és a β_1 közötti, a kötél nyújthatatlanságából eredő összefüggés:

(4) $$a = r_1\beta_1.$$



1. ábra

A súrlódási együttható értékétől függően két eset lehetséges: a kötél vagy tapad a nagy hengerhez, vagy csúszik rajta. Vizsgáljuk az utóbbi esetet! Ekkor

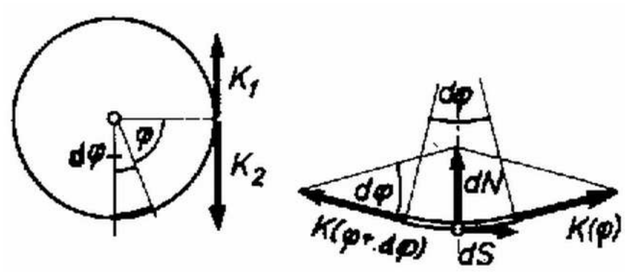
(5) $$a \geq r_2\beta_2,$$

tehát még egy egyenletre van szükségünk. Tekintsük a kötélnek egy kis dφ középponti szöghöz tartozó darabját (2. ábra)! A kötéldarab végeinél ható erők nagyságát jelöljük $K(\varphi)$, ill. $K(\varphi + \mathrm{d}\varphi)$-vel! Az ábráról leolvasható, hogy a kötéldarab

(6) $$\mathrm{d}N \cong K(\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

nagyságú erővel nyomja a hengert. Mivel a kötél csúszik,

(7) $$\mathrm{d}S = \mu \mathrm{d}N.$$



2. ábra

A súlytalan köteldarabra ható erőknek ki kell egyensúlyozniuk egymást, különben a gyorsulás végtelenül nagy lenne, ezért

(8) $$K(\varphi+\mathrm{d}\varphi) - K(\varphi) = \mathrm{d}s,$$

azaz

(9) $$K(\varphi+\mathrm{d}\varphi) - K(\varphi) = \mu K(\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

A (6), (8) és (9) összefüggések közelítőek, annál pontosabbak, minél kisebb a $\mathrm{d}\varphi$. A $\mathrm{d}\varphi \to 0$ határátmenettel (9)-ből a

(10) $$\frac{\mathrm{d}K(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = \mu K(\varphi)$$

differenciálegyenletet kapjuk. Rendezzük át az egyenletet, és integráljuk mindkét oldalt φ_1, φ_2 határok között:

(11) $$\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mathrm{d}K(\varphi)}{K(\varphi)} = \mu \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mathrm{d}\varphi;$$

$$\ln\frac{K(\varphi_2)}{K(\varphi_1)} = \mu(\varphi_2 - \varphi_1).$$

(12) $$K(\varphi_2) = K(\varphi_1)\cdot e^{\mu(\varphi_2-\varphi_1)}.$$

Felhasználva, hogy $K(0) = K_1$; $K(2\pi) = K_2$, (12)-ből $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$ helyettesítéssel nyerjük:

(13a) $$K(\varphi) = K_1 \cdot e^{\mu\varphi},$$

(13b) $$K_2 = K_1 \cdot e^{2\pi\mu}.$$

Ezzel megkaptuk (10)-nek azt a megoldását, amely kielégíti a $K(0) = K_1$ kezdeti feltételt (vö. a januári számban kitűzött 1479. feladattal). Az (1) – (4) egyenletrendszert a (13*b*) egyenlet teszi teljessé. A megoldás:

(14) $$\begin{aligned} a &= g\cdot\frac{2m}{2m+m_1c};\\ \beta_1 &= \frac{g}{r_1}\cdot\frac{2m}{2m+m_1c};\\ K_1 &= mg\cdot\frac{m_1}{2m+m_1c};\\ K_2 &= mg\cdot\frac{m_1}{2m+m_1c}\cdot c;\\ \beta_2 &= \frac{g}{r_2}\cdot\frac{2m}{2m+m_1c}\cdot\frac{m_1}{m_2}(c-1); \quad c = e^{2\pi\mu}. \end{aligned}$$

Ez a megoldás akkor helyes, azaz a kötél akkor csúszik valóban a hengeren, ha (5) teljesül. Ez a feltétel (14) behelyettesítésével a

$$\frac{m_1}{m_2}(c-1) \le 1, \tag{15}$$

$$\mu \le \frac{1}{2\pi} \cdot \ln \frac{m_1 + m_2}{m_1}$$

alakra hozható. Ha μ a jobb oldalon álló értéknél nagyobb, a kötél nem tud megcsúszni a hengeren. Ebben az esetben (10) és (13b) nem igaz, de (5)-ben az egyenlőség teljesül, és ez adja az ötödik egyenletet. A keresett mennyiségek ebben az esetben

$$a = g\,\frac{2m}{2m+m_1+m_2}; \qquad \beta_1 = \frac{g}{r_1}\,\frac{2m}{2m+m_1+m_2};$$

$$\beta_2 = \frac{g}{r_2} \cdot \frac{2m}{2m+m_1+m_2}; \qquad K_1 = m_1 g\,\frac{m}{2m+m_1+m_2};$$

$$K_2 = mg \cdot \frac{m_1+m_2}{2m+m_1+m_2}.$$

Czuczor Lajos (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.) és
Bene Gyula (Miskolc, Földes F. Gimn., III. o. t.)
dolgozata alapján

II. megoldás. A K_1 és a K_2 közötti összefüggés a következő úton is megkapható: a kötélnek a hengerre tekeredő részét n egyenlő részre osztva, az i-edik darabra (9) alapján

$$K\left(i\frac{2\pi}{n}\right) - K\left[(i-1)\frac{2\pi}{n}\right] = \mu\,\frac{2\pi}{n} \cdot K\left[(i-1)\frac{2\pi}{N}\right], \tag{16}$$

azaz

$$K\left(i\,\frac{2\pi}{n}\right) = \left(1 + \frac{\mu 2\pi}{n}\right) K\left[(i-1)\frac{2\pi}{n}\right] = \left(1 + \frac{\mu 2\pi}{n}\right)^i K(0), \tag{17}$$

ahonnan

$$K_2 = K_1 \left(1 + \frac{\mu 2\pi}{n}\right)^n. \tag{18}$$

Ez az egyenlőség annál pontosabb, minél nagyobb n.

A felosztást finomítva megkapjuk (13b)-t:

$$K_2 = K_1 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2\pi\mu}{n}\right)^n = K_1 \cdot e^{2\pi\mu}. \tag{19}$$

Kilián Imre (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., IV. o. t.)