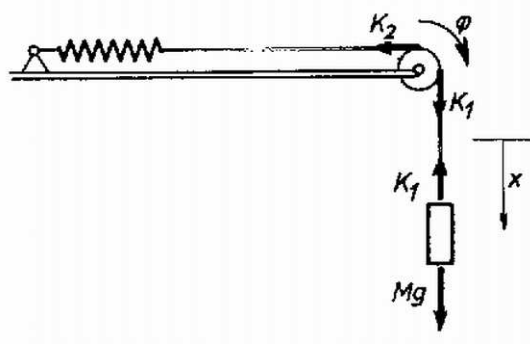


A kötél végére M tömegű testet akasztva egyensúlyban a rugó l_0 hosszal ny lik meg:

$$(1) \quad l_0 = Mg/D.$$

A feladatban leírt kezdeti helyzet után létrejövő mozgásnál a test x k t r s t és a csiga φ szögelfordulását célszerű ettől a nyugalmi helyzettől mérni.



Az ábra alapján írjuk fel a mozgásegyenleteket:

$$(2) \quad Mg - K_1 = Ma.$$

$$(3) \quad (K_1 - K_2)r = \Theta\beta,$$

ahol a csiga tehetetlenségi nyomatéka

$$(4) \quad \Theta = (1/2)mr^2.$$

A rugóra vonatkozó erőtörvény szerint

$$(5) \quad K_2 = D(l_0 + x).$$

Mivel a kötél nyújthatatlan és a csigán nem csúszik meg, az x elmozdulás és a φ szögelfordulás közti kényszerfeltétel:

$$(6) \quad r\varphi = x,$$

illetve a megfelelő gyorsulásokra:

$$(7) \quad r\beta = a.$$

A mozgás leírásához célszerű az (1) – (7) egyenleteket átrendezni. A (2)  s (3) egyenletet összeadva

$$Mg - K_2 = Ma + (\Theta/r)\beta,$$

majd K_2 , β , l_0 és Θ értékét az (5), (7), (1)  s (4) egyenletekből behelyettesítve:

$$(8) \quad -Dx = [M + (1/2)m]a.$$

Az  gy nyert összefüggés egy $M + (1/2)m$ effektív tömegű harmonikus oszcillátor mozgásegyenlete. A kötélen l g  test t h t

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{M + (1/2)m}}$$

körfrekvenciájú rezgőmozgást végez. Az x k t r s időfüggése:

$$(9) \quad x = h \cos \sqrt{\frac{D}{M + (1/2)m}} t,$$

ahol az amplitúdó és a fázis meghatározásánál felhasználtuk, hogy a $t = 0$ pillanatban az elengedett test kitérése $x(t = 0) = h$ volt. A (6) összefüggés alapján a csiga mozgását a

$$(10) \quad \varphi = \frac{h}{r} \cos \sqrt{\frac{D}{M + (1/2)m}} t$$

egyenlet írja le.

Vizsgáljuk meg a fenti megoldás érvényességi határát! A kötélen nem adhat át nyomóerőt, ezért ha a (2) – (7) egyenleteket a teljes mozgásra kívánjuk alkalmazni, teljesülnie kell a $K_1 \geq 0$ és a $K_2 \geq 0$ feltételeknek. Az első egyenlőtlenség (2) alapján a gyorsulásra jelent megkötést:

$$(11) \quad a \leq g,$$

míg a második a kitérésre:

$$(12) \quad x \geq -l_0.$$

A maximális gyorsulás: $a_{\max} = h \frac{D}{M + (1/2)m}$. A kitérés a $-h \leq x \leq h$ határok között változik. A (11) és (12) egyenlőtlenségek fennállásához ezért a

$$(13) \quad h \frac{D}{M + (1/2)m} \leq g,$$

$$(14) \quad h \leq l_0 = Mg/D$$

összefüggéseknek kell teljesülniük. Ezek közül a (14) feltétel a szigorúbb; teljes periódusú harmonikus rezgőmozgást csak akkor végez a test, ha az elengedés pillanatában a nyugalmi állapottól mért lehúzás értéke nem nagyobb, mint Mg/D .

Ha $h > Mg/D$, a (12) egyenlőtlenség alapján a test és a csiga mozgását a harmonikus rezgőmozgás (9) és (10) egyenletei csak a

$$t_0 = \frac{1}{\omega} \arccos \left\{ -\frac{l_0}{h} \right\} = \sqrt{\frac{M + (1/2)m}{D}} \arccos \left\{ -\frac{Mg}{Dh} \right\}$$

időpillanatig írják le. Ekkor a kötelek meglazulnak, az M tömegű test $v_0 = -l_0 \omega \sin \omega t_0$ kezdősebességű függőleges hajítás pályáján mozog, a csiga v_0/r szögsebességgel egyenletesen forog tovább (kötélerők hiányában a kötélen nem tapadhat a csigára), az idealizált nulla tömegű rugó pedig állva marad.

$t' = 2v_0/g$ idő elteltével a test ellenkező irányú sebességgel érkezik az $x = -l_0$ ponthoz, a csiga forgásiránya azonban nem változik meg. Amint $x > -l_0$, az ébredő kötélerők rászorítják a kötelet a csigára és a súrlódási erő ellen munkát végeznek, mindaddig, amíg (a csiga forgásirányát, szögsebességét megváltoztatva) teljesül a (7) kényszerfeltétel.

Ha az elengedés pillanatában $h > Mg/D$, a létrejövő mozgás nem lesz periodikus. A mozgás közben lesznek olyan szakaszok, amikor a súrlódási erő ellen dolgozva a rendszer mechanikai energiája csökken. Így bizonyos idő elteltével a kitérés értéke az $-l_0 \leq x \leq l_0$ intervallumba kerül, és ettől kezdve a test és a csiga már ω körfrekvenciájú rezgőmozgást végez.

Dóra Csaba (Törökszentmiklós, Bercsényi M. Gimn., III. o. t.)
dolgozata alapján