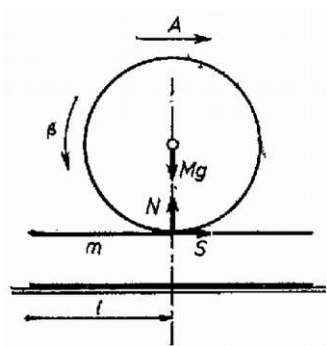
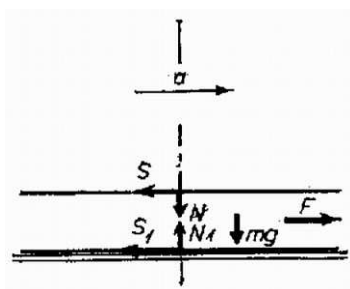


A golyóra a következő erők hatnak (1. ábra): súlyerő (Mg), nyomóerő (N), súrlódási erő (S). A fóliára ható erők (2. ábra): súlyerő (mg), húzóerő (F), nyomóerők (N és N_1), súrlódási erők (S és S_1). A gyorsulások és a szöggyorsulás jelölését, valamint a pozitív irányokat is feltüntettük az ábrán.



1. ábra



2. ábra

A mozgásegyenletek:

- | | |
|-----|---------------------|
| (1) | $MA = S,$ |
| (2) | $0 = Mg - N,$ |
| (3) | $\Theta\beta = SR,$ |
| (4) | $ma = F - S - S_1,$ |
| (5) | $0 = mg + N - N_1.$ |

Itt

- | | |
|-----|----------------------|
| (6) | $\Theta = (2/5)MR^2$ |
|-----|----------------------|

a golyó tehetetlenségi nyomatéka.

F nagyságától függően három esetet különböztetünk meg:

a) F elég kicsi. Ekkor a fólia odatapad az asztalhoz, a golyó sem mozog:

- | | |
|-----|----------|
| (7) | $a = 0;$ |
| (8) | $A = 0.$ |

Az (1)–(8) egyenletrendszerből kapjuk, hogy

$$\beta = 0, \quad S = 0, \quad S_1 = F;$$

és természetesen a golyó szögsebessége is nulla:

$$\omega = 0.$$

Az a) eset megvalósulásának feltétele, hogy

$$S_1 \leq \mu N_1,$$

azaz

$$(9) \quad F \leq \mu(m + M)g$$

legyen.

b) Ha

$$F > \mu(m + M)g,$$

de nem olyan nagy, hogy a golyó megcsússzék a fólián, akkor a fólia és a talaj közötti súrlódásra az

$$(10) \quad S_1 = \mu N_1,$$

valamint a golyó csúszásmentes gördülésére az

$$(11) \quad R\beta = a - A$$

egyenletek teljesülnek. Az (1)–(6), (10), (11) egyenletrendszer megoldva a következő eredményeket kapjuk:

$$a = \frac{7F - \mu(m + M)g}{M + \frac{7}{2}m}, \quad A = \frac{F - \mu(m + M)g}{M + \frac{7}{2}m}, \quad \beta = \frac{5}{2R} \frac{F - \mu(m + M)g}{M + \frac{7}{2}m}.$$

Szükségünk van még a golyó szögsebességére hosszú idő elteltével, azaz jóval a fólia kihúzása után. Ehhez először számítsuk ki, hogy mennyi ideig marad a fólián a golyó. A golyó gyorsulása a fóliához képest $a - A$, így a leesésig eltelt t_1 időre igaz a következő:

$$l = (1/2)(a - A)t_1^2,$$

ahonnan

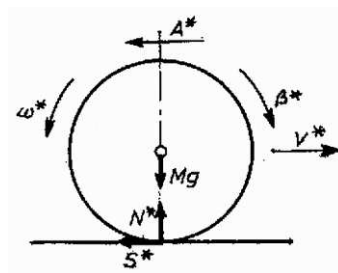
$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{a - A}}.$$

Így a golyó szögsebessége a leesés pillanatában

$$\omega_1 = \beta t_1 = \sqrt{\frac{2l\beta}{R}}.$$

A golyó sebessége ekkor

$$v_1 = At_1 = (2/5)\sqrt{2lR\beta}.$$



3. ábra

Nagyon lényeges körülmény azonban az, hogy a golyó a sebességének megfelelő forgásiránnyal ellentétes irányban forog. A golyó mozgásegyenletei a talajra érkezés után (3. ábra):

$$0 = Mg - N^*,$$

$$\Theta\beta^* = S^*R; \\ MA^* = S^*, 0 = Mg - N^*, \Theta\beta^* = S^*R;$$

valamint amíg a köszörülés (csúszva gurulás) tart, addig

$$S^* = \mu N^*.$$

Az (1*)–(4*), (6) egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy

$$A^* = \mu g, \quad \beta^* = (5/2)\mu g/R.$$

Így a golyó sebessége

$$v^* = v_1 - A^* t,$$

szögsebessége pedig

$$\omega^* = \omega_1 - \beta^* t$$

alakban függ az időtől.

A köszörülés abban a t_2 időpillanatban fejeződik be, amikor a golyó sebessége és szögsebessége kielégíti a gördülés

$$v^* = -\omega^* R$$

feltételét. Behelyettesítés után kapjuk, hogy

$$t_2 = \frac{2}{7} \frac{v_1 + \omega R}{\mu g} = \frac{2}{5} \frac{\sqrt{2lR\beta}}{\mu g}.$$

A keresett ω értéket az ω^* adja meg, ha behelyettesítjük a t_2 időt:

$$\omega = \omega^*(t_2) = \omega_1 - \beta^* t_2 = 0.$$

Így – érdekes módon – a golyó, miután elhagyta a fóliát, t_2 idő múlva megáll.

A b) eset megvalósulásának az a feltétele, hogy ne következzen be csúszás a golyó és a fólia között, azaz

$$(12) \quad S \leq \mu N,$$

vagyis

$$\begin{aligned} A &\leq \mu g, \\ F &\leq \mu g[2M + (9/2)m] \end{aligned}$$

legyen.

c) Ha

$$F > \mu g[2M + (9/2)m],$$

akkor az (1)–(6), (10) egyenletekhez az

$$(13) \quad S = \mu N$$

egyenlet csatlakozik, mivel a golyó és a fólia egymáson csúsznak. Az egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy

$$a = \frac{F - \mu g(2M + m)}{m}, \quad A = \mu g, \quad \beta = \frac{5}{2} \frac{\mu g}{R}.$$

Ebben az esetben ismét ki kell számítanunk a golyó szögsebességét a talajra érést követő köszörülés befejezése után.

A b) esethez hasonlóan a leesésig eltelt idő

$$t_3 = \sqrt{\frac{2l}{a - A}}.$$

A golyó szögsebessége a leesés pillanatában

$$\omega_3 = \beta t_3 = \frac{5}{2} \frac{\mu g}{R} \sqrt{\frac{2lm}{F - 2\mu g(M + m)}}.$$

A golyó sebessége ekkor

$$v_3 = A t_3 = \mu g \sqrt{\frac{2lm}{F - 2\mu g(M + m)}}.$$

Természetes, hogy az (1*)–(4*), (6) egyenletrendszer írja le most is a mozgást, azaz az előző pontban felírt β^* és A^* értékekkel számolhatunk.

A golyó sebessége a köszörülés során

$$v^* = v_3 - A^* t,$$

szögsebessége

$$\omega^* = \omega_3 - \beta^* t.$$

A

$$v^* = -\omega^* R$$

egyenletből kifejezve a kőszörülés időtartamát, azt kapjuk, hogy a kőszörülés befejezésének időpontja

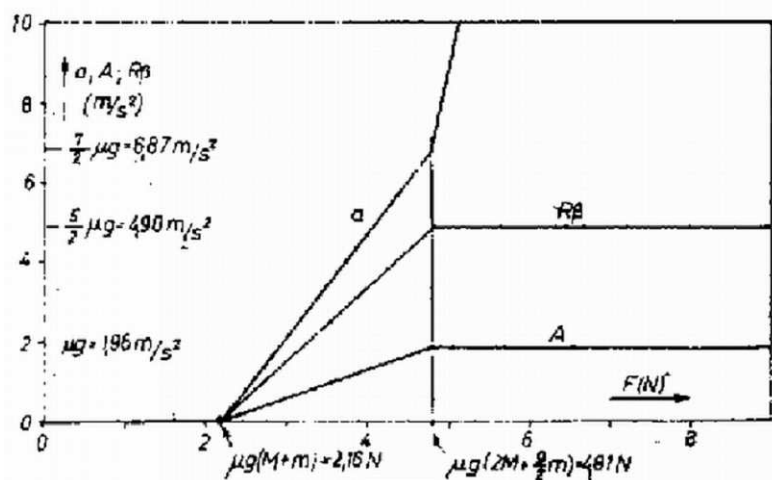
$$t_4 = \frac{2v_3 + \omega_3 R}{\mu g} = \sqrt{\frac{2lm}{F - 2\mu g(m + M)}}.$$

A keresett ω értéket az $\omega^*(t_4)$ behelyettesítéssel számíthatjuk ki:

$$\omega = \omega^*(t_4) = \omega_3 - \beta^* t = 0.$$

Ismét azt kaptuk, hogy a golyó állva marad.

A numerikus adatok felhasználásával nyert eredményeinket a 4. ábrán szemléltetjük.



4. ábra

Csók Tibor (Kecskemét, Katona J. Gimn., IV. o. t.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. Az impulzus és impulzusmomentum tételének alkalmazásával közvetlenül és egyszerűen bizonyítható, hogy a golyó a végén állva marad.