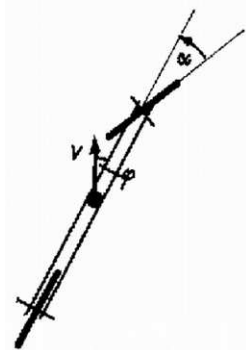


Készítsünk felülnézeti rajzot a kerékpár egy általános helyzetéről (1. ábra; a kerékpár síkjának a függőlegestől való eltérését, valamint azokat a hatásokat, amelyek a súlypont és az alátámasztási pontok magasságkülönbségéből adódnak, most és a továbbiakban mindig elhanyagoljuk). Egyenes vonalú mozgás esetén az első kerék vetülete és a kerékpár hossz tengelye közötti α szög nulla, és a tömegközéppont v sebessége is a hossz tengely irányába mutat ($\varphi = 0$). Az $\alpha \neq 0$ a normális kormányzásnak felel meg, $\alpha = 0$, $\varphi \neq 0$ pedig akkor lehetséges, ha a hátsó kerék csúszik.



1. ábra

A feladat modell járműve olyan esetet jelképez, amely egyenesen tartott kormánynak felel meg. A fékezés kezdetekor a kocsi egyenes vonalon mozgott, tehát $\alpha = \varphi = 0$ a fékezés megkezdését követő pillanatban is.

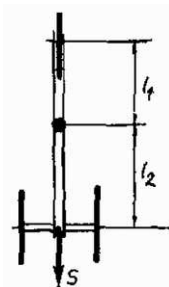
A kocsira ható erők felrajzolásához a következőket kell tudni:

1. Gördülő és szabadon forgó kerék esetén a kerék és a talaj közötti súrlódási erő jó közelítéssel merőleges a kerék síkjára. (A közelítés feltétele: $\Theta^*/r^2 \ll m$, ahol Θ^* a kerék tehetetlenségi nyomatéka, r a kerék sugara, m pedig az egész jármű tömege. A bizonyításnál azt kell felhasználni, hogy a súrlódási erő párhuzamos komponense a kerék nagy szöggyorsulását okozná, ami nincs összhangban a gördülés feltételével.)

2. Teljesen befékezett kerekekre csúszó súrlódási erő hat, ami ellentétes irányú a relatív elmozdulással. Az erő nagysága

$$(1) \quad S = \mu N = \mu \frac{l_1}{l_1 + l_2} mg,$$

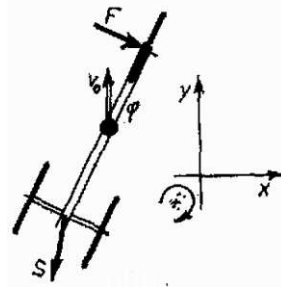
ahol μ a súrlódási együttható, l_1 , l_2 az első és a hátsó kerék súlyponttól mért távolsága, N a talaj nyomóereje, mg pedig a jármű súlya (2. ábra).



2. ábra

Az elmondottakból egyszerűen következik, hogy a kerékpár a fékezés megkezdése után egyenes vonalú pályán egyenletesen lassulni fog, mert 1. alapján az első kerékre nem hat súrlódási erő (ha a kerék síkjára merőleges súrlódási erő nullától különbözne, akkor megbontaná a szimmetriát), 2. alapján pedig a hátsó kerékre a tömegközéppont sebességével ellentétes irányú erő hat (2. ábra). A tömegközéppontra vonatkozó forgatónyomaték is nulla.

Lehetséges azonban, hogy a valóságban mégsem ez történik. Ennek oka, hogy a járművet mindig érik oldalirányú erőhatások, amelyek az egyenes pályától egy kicsit eltérítik, és előfordulhat, hogy egy ilyen oldallökés után nem az eredeti egyenes vonalú mozgás áll vissza, hanem egy bonyolult, csúszó, forgó mozgás.



3. ábra

A probléma részletes vizsgálatához válasszunk egy olyan koordináta-rendszert, amelynek y -tengelye a jármű eredeti mozgásának irányába mutat (3. ábra). Tételezzük fel, hogy a lökés a jármű sebességét alig változtatta meg, ezért a tömegközéppont sebességének komponenseire igaz a

$$(2) \quad v_y = v_0,$$

$$(3) \quad v_x \ll v_0$$

feltétel, ahol v_0 a jármű sebessége a lökés előtt. A jármű mozgásában keletkezett zavar egyértelműen jellemezhető a kocsisíntengelyének és a koordináta-rendszer y -tengelyének szögével (ez a szög a (3) feltétel miatt megegyezik az 1. ábrán definiált φ szöggel), továbbá a jármű függőleges tengely körüli forgásának ω szögsebességével.

A feladat a (3) közelítés nélkül és tetszőleges ω , φ mellett is megoldható, de matematikailag nagyon bonyolult és nehezen áttekinthető. A mozgás jellemzésére szerencsére elég azt vizsgálni, amikor a

$$(4) \quad \varphi \ll \pi$$

feltétel is teljesül.

A 3. ábrán felrajzoltuk a kocsira ható erőket is. Az 1. miatt az F súrlódási erő merőleges az első kerék síkjára. A hátsó kerekeknél fellépő súrlódási erő nagyságát az (1) egyenlet adja meg, és irányáról egyelőre semmit sem tudunk. Feltételezzük, hogy a súrlódási erővektor vetületei a $-x$, $-y$ koordináta irányokba mutatnak, de a későbbiekben ezt ellenőrizni kell.

A mozgásegyenletek:

$$(5) \quad ma_y = -S_y - F \cdot \sin \varphi,$$

$$(6) \quad ma_x = F \cdot \cos \varphi - S_x,$$

$$(7) \quad \Theta \beta = Fl_1 - (S_y \cdot \sin \varphi - S_x \cdot \cos \varphi)l_2.$$

Itt Θ a tömegközépponton átmenő függőleges tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték, β a szöggyorsulás, a_x , a_y , a tömegközéppont gyorsulásának vetületei, S_x , S_y pedig az S súrlódási erő vetületei.

E három egyenlet felírásával még nem vettük figyelembe, hogy az első kerék gördülése miatt a szöggyorsulás és a tömegközéppont gyorsulása nem független. Meg kell még határozni az S súrlódási erő irányát is.

Az első és hátsó kerék elmozdulását leírhatjuk a tömegközéppont elmozdulása és a tömegközéppont körüli elfordulás összegeként.

A tömegközéppont elmozdulásának a kocsisíntengelyére merőleges vetülete

$$(8) \quad \Delta n = -\Delta y \cdot \sin \varphi + \Delta x \cdot \cos \varphi,$$

ahol Δx és Δy a tömegközéppont koordinátáinak megváltozása. A párhuzamos vetület:

$$(9) \quad \Delta p = \Delta y \cdot \cos \varphi + \Delta x \cdot \sin \varphi.$$

Az első kerék hossztengelyre merőleges elmozdulása

$$(10) \quad \Delta n_1 = \Delta \varphi \cdot l_1 + \Delta n = \Delta \varphi \cdot l_1 - \Delta y \cdot \sin \varphi + \Delta x \cdot \cos \varphi,$$

ahol $\Delta \varphi$ a szögelfordulás. Ez az elmozdulás azonban nem lehet nullától különböző, mert a kerék gördül. Átrendezve, $\Delta n_1 = 0$ behelyettesítésével és az elmozdulásokhoz szükséges idővel osztva végül kapjuk:

$$(11) \quad \omega l_1 = v_y \cdot \sin \varphi - v_x \cdot \cos \varphi.$$

Ezt a kényszerfeltételt később még többször is alkalmazzuk.

A hátsó kerék elmozdulásának merőleges és párhuzamos vetülete:

$$(12) \quad \Delta n_2 = -\Delta \varphi \cdot l_2 - \Delta y \cdot \sin \varphi + \Delta x \cdot \cos \varphi,$$

$$(13) \quad \Delta p_2 = \Delta y \cdot \cos \varphi + \Delta x \cdot \sin \varphi.$$

E két elmozdulás komponens a súrlódási erő irányáról informál, mert megadja a talaj és kerék közötti relatív elmozdulás irányát.

Az (5), (6), (7) mozgásegyenletek, a (11) kényszerfeltétel és a (12), (13) egyenletek a jármű mozgását már teljesen meghatározzák. A további számításokhoz használjuk fel a (2), (3) és (4) feltételeket!

A (11) egyenlet közelítő alakja

$$(14) \quad \omega l_1 = v_y \cdot \varphi - v_x.$$

Kis Δt idő elteltével ω , v_x , v_y és φ értéke megváltozik. Az új egyenlőség

$$(15) \quad (\omega + \Delta\omega)l_1 = (v_y + \Delta v_y)(\varphi + \Delta\varphi) - (v_x + \Delta v_x).$$

A két egyenlet különbségét képezve, Δt -vel osztva, majd Δt -vel 0-hoz tartva megkapjuk a gyorsulásokra vonatkozó kényszerfeltételt:

$$(16) \quad \beta l_1 = a_y \cdot \varphi + v_y \cdot \omega - a_x.$$

A (2) és (3) feltétel miatt a (14) egyenlőség behelyettesítése után végül nyerjük:

$$(17) \quad \beta l_1 = a_y \varphi + v_0 \omega - a_x = a_y \varphi + \frac{v_0^2}{l_1} \varphi - a_x.$$

A (12) és (13) egyenlet a hátsó kerék elmozdulását nem az x - y koordináta-rendszerben adja meg, hanem az ezzel majdnem egybeeső „merőleges”, „párhuzamos” koordináta-rendszerben. Kis φ esetén a hátsó kerék elmozdulása

$$(18) \quad \Delta x_2 = \Delta n_2 + \varphi \cdot \Delta p_2,$$

$$(19) \quad \Delta y_2 = \Delta p_2$$

alakban számítható. A $\Delta x = v_x \cdot \Delta t$, $\Delta y = v_y \cdot \Delta t$, $\Delta \varphi = \omega \cdot \Delta t$ behelyettesítések után a (14) egyenlet és a (2), (3) közelítések felhasználásával végül kapjuk:

$$(20) \quad \Delta x_2 = -v_0 \varphi \frac{l_2}{l_1} \Delta t,$$

$$(21) \quad \Delta y_2 = v_0 \cdot \Delta t.$$

Látható, hogy Δx_2 a φ kitéréssel arányos kis mennyiség, $\Delta x_2 \ll \Delta y_2$. A súrlódási erő komponenseire az

$$(22) \quad S_x = S \frac{\Delta x_2}{\sqrt{\Delta x_2^2 + \Delta y_2^2}} = S \frac{\Delta x_2}{\Delta y_2} = -S \varphi \frac{l_2}{l_1},$$

$$(23) \quad S_y = S \frac{\Delta y_2}{\sqrt{\Delta x_2^2 + \Delta y_2^2}} = S.$$

közelítő formula érvényes. (S_x negatív előjele mutatja, hogy ez a vetület – korábbi feltevésünkkel szemben – a pozitív x -tengely irányába mutat.)

A mozgásegyenletek közelítő alakja

$$(24) \quad m a_y = -S_y - F \cdot \varphi,$$

$$(25) \quad m a_x = F - S_x,$$

$$(26) \quad \Theta \beta = F l_1 - (S_y \varphi - S_x) l_2.$$

Megoldandó egyenletrendszerünk φ rögzített értéke mellett az S_x , S_y , F , a_x , a_y β ismeretleneket tartalmazza, és a (17), (22), (23), (24), (25) és (26) egyenletekből áll. A súrlódási erő nagyságát az (1) egyenlet adja meg. Végeredményben a számunkra érdekes mennyiség a szöggyorsulás:

$$(27) \quad \beta = \frac{m v_0^2 - S \frac{(l_1 + l_2)^2}{l_1}}{\Theta + m l_1^2} \cdot \varphi.$$

Ebből az eredményből levonható első és legfontosabb következtetésünk: a szöggyorsulás előjele a kocsii jellemzőitől és sebességétől, valamint a súrlódási erő nagyságától függően megegyezik vagy ellentétes a szögeltérés előjelével. Ha a v_0 sebesség a

$$(28) \quad v_{\text{kritikus}} = \sqrt{\frac{S}{m} \cdot \frac{(l_1 + l_2)^2}{l_1}}$$

sebességértéknél nagyobb, akkor az előjel pozitív, és a mozgás a φ szög növekedését eredményezi; a kocsi tovább farol és csúszik. Ha a sebesség ennél kisebb, akkor a szöggyorsulás iránya a kitéréssel ellentétes, és visszaáll az eredeti egyenes vonalú lassulás. (A szöggyorsulás és szögkitérés közötti összefüggés emlékeztet a fizikai inga mozgásegyenletére, ezért $\varphi = 0$ körüli rezgéseket várnánk. A (27) képlet azonban még kis φ esetén is csak $v_x = 0$ esetén egzakt. A részletes vizsgálat megmutatja, hogy az oldalirányú sebességből adódó tagok a rezgés csillapodását eredményezik.)

Felmerül a kérdés, mi okozza a jármű oldalra fordulási hajlamát nagy sebességek esetén? A 3. ábrából látható, hogy a pozitív szöggyorsulást az F erő hozza létre, ha tehát a kormány mozdításával ($\alpha < 0$ az 1. ábrán) az F erőt változtatjuk, akkor a járművet stabilizálhatjuk.

A mozgás természetes stabilizáló ereje a hátsó keréknél fellépő súrlódás. Ha a súrlódási erő az (1) összefüggés szerint függ l_1 -től és l_2 től, akkor a kritikus sebesség

$$(29) \quad v_{\text{krit}} = \sqrt{\mu g(l_1 + l_2)}.$$

A valóságban a gumifelület és az aszfalt közötti csúszó súrlódás nem arányos a nyomóerővel, és a sebességtől is függ. Nagyobb nyomóerő esetén a számított μN -nél kisebb súrlódást kapunk, ezért kedvezőbb, ha a jármű súlypontja az első kerékhez közelebb van (kis l_1 a (28) kifejezésben).