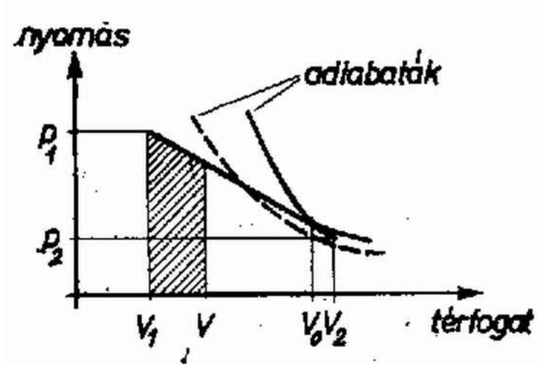
I. megoldás. Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy egy mólnyi ideális gázt vizsgálunk, s legyen az állandó térfogat mellett mért mólhő c_V.



1. ábra

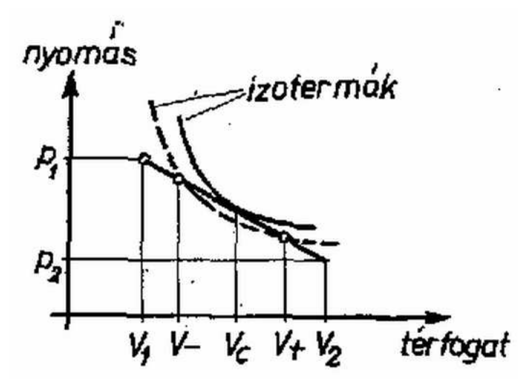
A folyamatot a $p-V$ síkon az 1. ábrán látható grafikon szemlélteti. Ennek megfelelően az állapotváltozás egyenlete

(1) $$p(V) = p_1 + a(V - V_1), \qquad V_1 \leqq V \leqq V_2$$

ahol

(2) $$a = \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1} < 0.$$

Az egyenes minden pontján átmegy egy adiabata, vagyis egy olyan görbe, amely hőfelvétel nélküli folyamatot ír le. Amennyiben az adiabata meredekebben csökken, mint az egyenes, az egyenessel jellemzett változás a szóban forgó pont környezetében *hőfelvétellel* jár, hiszen adott térfogat-növekedés mellett több munkavégzés történik, mint amennyit a belső energia változása fedezhetne. (Ez utóbbi eset jelenti az adiabatikus változást.) *Hőleadás* pedig abban a tartományban történik, amelynek pontjaiban az egyenes meredeksége nagyobb a megfelelő adiabatákénál.



2. ábra

E két tartományt olyan pont választja el, ahol a két meredekség egyenlő. Határozzuk meg most ezen pont V_0 koordinátáját! Ideális gáz adiabatájának egyenlete (l. Budó: Kísérleti fizika I.):

$$p = \frac{c}{V^\chi}$$

alakú, ahol c állandó, $\chi = c_p/c_V$ pedig a két fajhő hányadosa. A

$$c_p - c_V = R$$

összefüggés felhasználásával

(3) $$\chi = \frac{c_p}{c_V} = \frac{R}{c_V} + 1.$$

Az adiabata meredeksége

$$-\chi\frac{c}{V^{\chi+1}} = -\chi\frac{p}{V},$$

az egyenesé pedig a. A V_0 pontban e két adat egyenlő, tehát

$$-\chi\frac{p(V_0)}{V_0} = a.$$

(1) behelyettesítése és rendezés után adódik, hogy

$$V_0 = \frac{\chi}{1+\chi}\left(V_1 - \frac{p_1}{a}\right).$$

(2) és (3) fölhasználásával csupa ismert adattal fejezzük ki V_0-at:

$$V_0 = \frac{(c_V/R)+1}{(2c_V/R)+1} \cdot \frac{p_2V_1 - p_1V_2}{p_2 - p_1}. \tag{4}$$

Ezek után már választ tudunk adni a feladat első kérdésére.

Amennyiben az adatok olyanok, hogy

$$V_1 < V_0 < V_2, \tag{5}$$

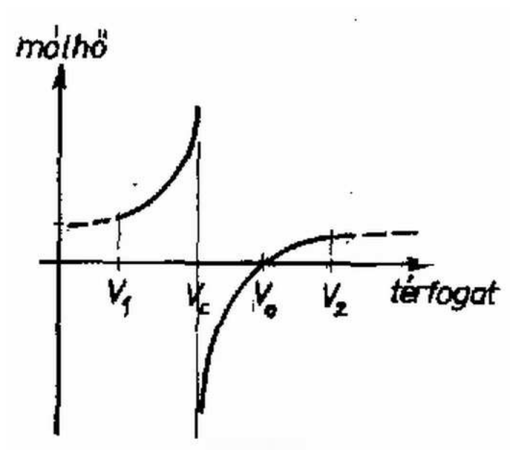
akkor a $(V_1,\ V_0)$ intervallumban hőfelvétel, a $(V_0,\ V_2)$-ben hőleadás történik. Ha

$$V_0 < V_1, \tag{6}$$

akkor az egész folyamatban hőleadás, a

$$V_0 > V_2 \tag{7}$$

esetben pedig hőfelvétel történik.



3. ábra

A következő lépés a fajhő meghatározása. Az 1329. feladatban [KML 52 (1976) 230. old.] ugyanezen folyamat fajhőjét kiszámoltuk (csak ott a pozitív volt), ezért itt most egyszerűen idézzük az ottani eredményt (javasoljuk az olvasóknak, hogy tanulmányozzák át a részletes levezetést). A mólhő a folyamat során pontról pontra változik; s amikor a rendszer térfogata V, akkor

$$c(V) = c_V + R\frac{p_1 + a(V - V_1)}{p_1 + a(2V - V_1)}. \tag{8}$$

A (8) összefüggést a 3. ábra szemlélteti, l. a megjegyzést.

II. megoldás. Azt, hogy a folyamat melyik részén történik hőfelvétel, úgy is meghatározhatjuk, hogy megvizsgáljuk, mennyi hőt vesz fel a rendszer a V térfogat eléréséig. Ha ismerjük az ezt leíró $Q(V)$ függvényt, akkor már meg tudjuk adni a kívánt választ. Tekintsünk ugyanis egy V értéket! Ha ennél ΔV-vel nagyobb térfogathoz nagyobb hő tartozik, mint a kiindulási, vagyis ha

$$Q(V+\Delta V) - Q(V) > 0,$$

akkor a ΔV szakaszon hőfelvétel történt. A pozitív ΔV-vel osztva

$$\frac{Q(V+\Delta V) - Q(V)}{\Delta V} > 0.$$

Ha a térfogatváltozással nullához tartunk, akkor a $Q(V)$ függvény differenciálhányadosát nyerjük. Abban a tartományban tehát, ahol a $Q(V)$ függvény differenciálhányadosa pozitív, hőfelvétel játszódik le. Hasonlóan kapjuk, hogy a negatív differenciálhányadoshoz hőleadás tartozik. Az eltűnő differenciálhányados a két tartományt elválasztó pontot, tehát V_0 értékét adja meg.

Írjuk fel a $Q(V)$ függvényt! A V térfogat eléréséig végzett munka nagysága a függvénygörbe alatti területtel egyenlő. Az ábra alapján

$$W = -\frac{p_1 + p}{2}(V - V_1)$$

(a trapéz területe). A belső energia megváltozása

$$\Delta U = c_V(T - T_1),$$

ahol $T_1 = \dfrac{p_1 V_1}{R}$, $T = \dfrac{pV}{R}$, a kezdő és a közbenső állapot hőmérséklete. Az I. főtétel alapján

$$Q = \Delta U - W = \frac{c_V}{R}(pV - p_1V_1) + \frac{p_1 + p}{2}(V - V_1),$$

(1) -et behelyettesítve:

$$Q(V) = p_1(V - V_1) + \frac{a}{2}(V^2 - 2VV_1 + V_1^2) + \frac{c_V}{R}\left[(p_1 - aV_1)V + aV^2 - p_1V_1\right].$$

Ennek deriváltja:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V} = p_1 + a(V - V_1) + \frac{c_V}{R}(p_1 - aV_1 + 2aV) = = \left(1 + \frac{c_V}{R}\right)(p_1 - aV_1) + \left(2\frac{c_V}{R} + 1\right)aV.$$

Ez annál a V_0 értéknél válik nullává, amelyre

(9)
$$V_0 = \frac{(c_V/R) + 1}{(2c_V/R) + 1}\left(V_1 - \frac{p_1}{a}\right),$$

ami megegyezik (4)-gyel. A derivált előjelének vizsgálatával ugyanarra az eredményre jutunk, mint az előző megoldásban.

Bene Gyula (Miskolc, Földes F. Gimn., III. o. t.)
dolgozata alapján

III. megoldás. A hőfelvételi és hőleadási tartományokat elválasztó pont az alapján is meghatározható, hogy ott a mólhő előjelet vált úgy, hogy folytonosan megy át pozitívból negatív értékbe, vagy fordítva. (Az 1. megjegyzésben látni fogjuk, hogy előfordulhat nem folytonos előjelváltozás is.) A (8)-ban felírt $c(V)$ függvény zérushelyére a következő feltételt kapjuk:

$$c_V\left[p_1 + a(2V_0 - V_1)\right] = -R\left[p_1 + a(V_0 - V_1)\right].$$

Innen

$$V_0 = \frac{c_V/R) + 1}{2c_V/R) + 1}\left(V_1 - \frac{p_1}{a}\right).$$

Megjegyzések. 1. *Bene Gyula* észrevette, hogy a mólhő (8) kifejezése a

$$V_c = (1/2)\left[V_1 - (p_1/a)\right]$$

pontban végtelenné válik. Vizsgáljuk meg ezt a kérdést részletesebben! A $p - V$ sík minden egyes pontján átmegy egy izoterma is (2. ábra). Amíg az izomtermák meredekebbek, mint az egyenes, addig balról jobbra haladva (növekvő térfogattal) a rendszer hőmérséklete is nő, utána csökken. A két tartományt az a V' pont választja el, melyben az izoterma éppen érinti az egyenest. Határozzuk meg ezt a V' mennyiséget! Ehhez először kiszámoljuk, hogy adott hőmérsékletet mely pontban (pontokban) vesz föl a folyamat során az ideális gáz. A

$$p = RT/V$$

állapotegyenletet (1)-be helyettesítve V-re másodfokú egyenletet kapunk, amelynek megoldása

$$V_{\substack{+\\(-)}}(T) = \frac{V_1 - (p_1/a) \pm \sqrt{\left[V_1 - (p_1/a)\right]^2 + 4RT/a}}{2}.$$

Esetünkben $a < 0$, így ha van valós megoldás, akkor mindkét megoldás pozitív, csak nem biztos, hogy a $(V_1,\ V_2)$ intervallumon belül. Ha V_- és V_+ is a vizsgált intervallumon belül van, akkor V_- jelenti a kisebb, V_+ pedig a nagyobb térfogatértéket (2. ábra). [A mólhő (8) kifejezésének precíz levezetését a fenti összefüggés segítségével kell végezni.] Az érintési pontban a diszkrimináns eltűnik, tehát

$$V' = (1/2)\left[V_1 - (p_1/a)\right] = V_c.$$

A V_c pont közvetlen környezetében a rendszer *hőmérséklete* nem változik, hőközlés azonban történik, hiszen munkavégzés van, s ez mind hővé alakul, így érthető, hogy ez formálisan végtelen nagy fajhő megjelenésében mutatkozik meg. Az is világos, hogy a fajhő előjele itt megváltozik: V_c, és V_0 összehasonlításából közvetlenül látszik, hogy V_c mindig kisebb, mint V_0. Az előzőekben megmutattuk, hogy V_0-ig hőfelvétel történik. A térfogatot növelve először a hőmérséklet is nő, így a fajhő pozitív lesz. V_c értékét átlépve azonban a hő továbbra is pozitív, de a hőmérséklet-különbség negatívvá válik, így a fajhő is negatív lesz. Először nagyon nagy érték, s fokozatosan csökken. V_0 után már a felvett hő is előjelet vált, így ismét pozitív fajhőt kapunk. Arra az esetre, amikor a V_0 és V_c értékek a $(V_1,\ V_2)$ intervallumba esnek, a 3. ábra mutatja a mólhő függését a V állapotjelzőtől. A mólhő tehát előjelet vált a V_c pontban is, de itt végtelen nagy ugrása is van, hiszen a hőmérséklet-változás V_c körül nulla. Az ilyen típusú előjelváltás azonban nem jelenti azt, hogy a hőfelvétel is előjelet vált, ellenkezőleg, amiatt lép föl, hogy a hőfelvétel előjele változatlan, de a hőmérséklet-különbség előjele megcserélődik.

Annak ellenére, hogy a mólhő V_c-ben végtelen, a hőfelvétel mégis véges, amit jól mutat az, hogy a $Q(V)$ függvény nem válik végtelenné ezen a helyen.

2. Sok megoldó a V_c pontot tekintette a hőfelvétel előjelváltását leíró adatnak. Ez valószínűleg abból adódik, hogy nem különböztetik meg élesen a hő és hőmérséklet fogalmát. A V_c pont körül – mint láttuk – hőmérséklet-különbség nem lép fel, de hőátadás igenis van. E két mennyiség tehát csak speciális esetekben arányos egymással, pl. folyadék melegítésekor, de sok más esetben függetlenek. (A magyar nyelvben egyébként az ilyen típusú szópárok két tagjának eltérő értelme van. *A hő és hőmérséklet között legalább akkora a különbség, mint a vér és vérmérséklet szavak jelentése között.)*

3. A megoldók nagy része úgy akarta kiszámolni a folyamat során közölt hőt, hogy egy izochor és egy izobár folyamat összegét vizsgálta. Sokszor leírtuk már, de álljon itt még egyszer: *a hő és a munkavégzés nem állapotjelzők* (ismét egy különbség a hő és hőmérséklet között!), ezért nem csak a kezdő és végállapottól függnek.

Tél Tamás