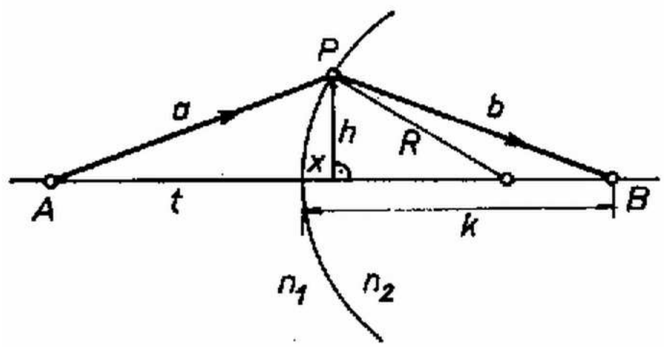
I. megoldás. A Fermat–elv szerint a fény két pont között mindig azon az úton halad, amelynek megtételéhez a legrövidebb idő szükséges. Az A pontról így csak akkor keletkezhet egy B pontban valódi kép, ha az A-ból különböző irányokban kiinduló fénysugarak ugyanannyi idő alatt érnek B-be, vagyis B-ben ismét összegyűlnek (1. ábra). Hasonlítsuk össze az optikai tengelyen és egy attól különböző, vele kis szöget bezáró irányban haladó fénysugárnak az A és B pont közötti út megtételéhez szükséges idejét (c a fény sebessége vákuumban):

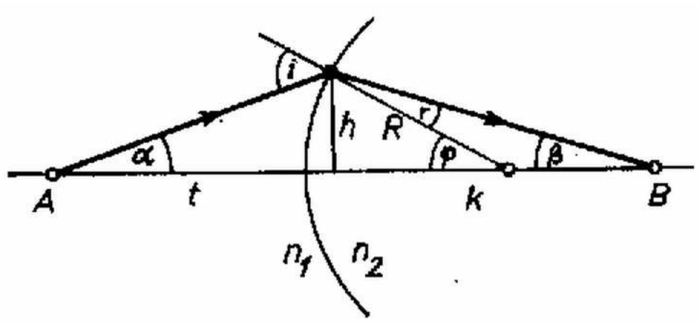
$$\frac{a}{(c/n_1)}+\frac{b}{(c/n_2)}=\frac{t}{(c/n_1)}+\frac{k}{(c/n_2)},$$

azaz

$$an_1+bn_2=tn_1+kn_2. \tag{1}$$



1. ábra



2. ábra

Fejezzük ki a-t és b-t t-vel, k-val és h-val! Ehhez szükségünk lesz az x távolság ismeretére:

$$x=R-\sqrt{R^2-h^2}\approx R-R[1-(h^2/2R^2)]=h^2/2R. \tag{2}$$

Itt felhasználtuk, hogy $h\ll R$, tehát érvényes a $\sqrt{1+\alpha}=1+(\alpha/2)$ közelítés. Felhasználva, hogy $x\ll h\ll t$:

$$a=\sqrt{(t+x)^2+h^2}=t\sqrt{1+(1/t^2)(2tx+x^2+h^2)}\approx t[1+(x/t)+(h^2/2t^2)].$$

x értékét (2)-ből beírva

$$a=t+(h^2/2R)+(h^2/2t) \tag{3}$$

és hasonlóan

$$b=k-(h^2/2R)+(h^2/2k). \tag{4}$$

(3)-at és (4)-et behelyettesítve (1)-be és rendezve, a rendszer leképezési törvényét kapjuk az optikai tengellyel kis szöget bezáró fénysugarak esetén:

$$(n_1/t) + (n_2/k) = (n_2 - n_1)R. \tag{5}$$

(A leképezési törvényt valódi kép esetére vezettük le. Belátható, hogy a szokásos előjel konvenció szerint látszólagos kép esetén is alkalmazható.)

(5)-ből a képtávolság

$$k = \frac{Rn_2}{(n_2 - n_1)t - n_1 R} \cdot t \tag{6}$$

Valódi kép akkor keletkezik, ha (6) nevezője pozitív,

$$n_2 > n_1 \quad \text{és} \quad t > R\frac{n_1}{n_2 - n_1}. \tag{7}$$

A felület két oldalán különböző a fókusztávolság. A bal oldali f_1 fókusztávolságot úgy kapjuk meg, hogy (6) felhasználásával megnézzük: $k \to \infty$ esetén mi t határértéke (a fókuszból induló sugarak a határfelületen túl párhuzamosan haladnak), így nyerjük:

$$f_1 = R\frac{n_1}{n_2 - n_1}.$$

A párhuzamosan érkező fénysugarak a jobb oldali fókuszpontban gyűlnek össze. (6) alapján $t \to \infty$ esetén k határértéke:

$$f_2 = R\frac{n_2}{n_2 - n_1}.$$

A (7) feltételek így azt fejezik ki, hogy akkor keletkezik valódi kép, ha a fókusztávolság pozitív (gyűjtőlencse) és a tárgy a fókusztávolságon kívül van.

Tóth Csaba (Sopron, Széchenyi I. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. A leképezési törvényt a fénytörés törvényét felhasználva is megkaphatjuk. A 2. ábra alapján

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r. \tag{1}$$

Kis szögek esetén a szög ívmértékben vett értéke, sinusa és tangense megegyezik, így

$$n_1 \cdot i = n_2 \cdot r. \tag{2}$$

$$i = \alpha + \varphi \quad \text{és} \quad r = \varphi - \beta,$$

ahol

$$\alpha = h/t, \quad \beta = h/k \quad \text{és} \quad \varphi = h/r.$$

Ezeket az összefüggéseket (2)-be beírva és rendezve az

$$(n_1/t) + (n_2/k) = (n_2 - n_l)R \tag{3}$$

leképezési törvényt kapjuk.

Benkő Zsigmond (Szolnok, Verseghy F. Gimn., II. o. t.)