

Tételezzük fel, hogy az ütközés időtartama az inga lengésidejéhez képest elhanyagolhatóan kicsiny. Közvetlenül az ütközés után az ingát ezért még függőlegesnek tekinthetjük, így az ingából és a lövedékből álló rendszerre ható külső erők hatásvonalát átveszi a P felfüggesztési ponton. Erre a pontra vonatkoztatva tehát a rendszerre külső forgatónyomaték nem hat, azaz az ütközés folyamán impulzusmomentuma nem változik. Az ütközés előtti impulzusmomentum:

$$(1) \quad N_1 = mvl,$$

közvetlenül az ütközés után:

$$(2) \quad N_1 = \Theta\omega$$

ahol ω az inga szögsebessége, Θ a rendszernek a P pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka az ütközés után:

$$(3) \quad \Theta = ml^2 + M_1l^2 + (1/3)Ml^2.$$

Feltettük, hogy a lövedék a M_1 -et tartó csuklóhoz közel állt meg, így a P ponttól való távolsága l -nek tekinthető. Az impulzusmomentum nem változott:

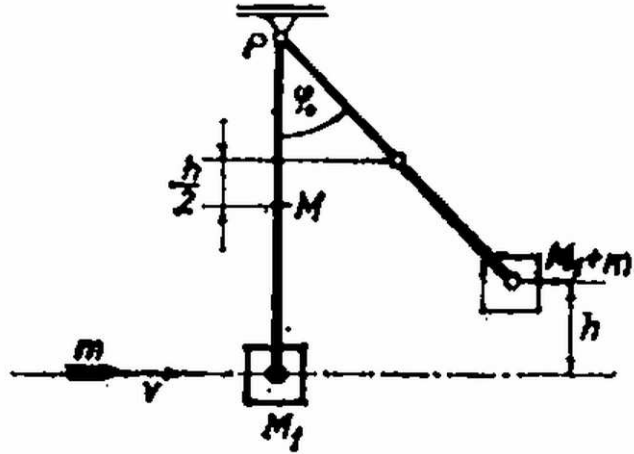
$$N_1 = N_2.$$

(1) és (2) felhasználásával az

$$(4) \quad \omega = \frac{mvl}{\Theta}$$

egyenlőséghez jutunk.

Következő lépésként a munkatételt alkalmazzuk. A rendszeren a nehézségi erő által végzett munka megegyezik a rendszer mozgási energiájának megváltozásával. Jelöljük a maximális kitérés szögét φ_0 -al – itt az inga nyugalomban van – az inga mozgási energiáját φ szögű helyzetében $E(\varphi)$ -vel!



Ekkor a mozgási energia megváltozása:

$$(5) \quad E(\varphi_0) - E(0) = -(1/2)\Theta\omega^2.$$

(Feltevésünk szerint a m tömegű lövedék a csuklóhoz közel állt meg. A M_1 és m tömegű testekből álló fizikai inga lengésideje ezért igen nagy. Így M_1 elfordulása a maximális kitéréskor még elhanyagolható, saját forgási energiával nem rendelkezik.)

Figyelembe véve, hogy a lövedék és a M_1 tömeg súlypontja a maximális kitéréskor még közel egy magasságban van, és a nehézségi erő ellenében történik a munkavégzés, a nehézségi erő munkája (l. az ábrát):

$$(6) \quad W = -(M_1 + m)gh - Mg(h/2) = -g[M_1 + m + (1/2)M]l(1 - \cos \varphi_0).$$

A munkatétel szerint:

$$W = E(\varphi_0) - E(0).$$

(5) és (6) alapján a következő egyenlőséghez jutunk:

$$-(1/2)\Theta\omega^2 = -gl(1 - \cos \varphi_0)[M_1 + m + (M/2)].$$

Ebből (3) és (4) felhasználásával a maximális kitérésnél

$$\cos \varphi_0 = 1 - \frac{m^2v^2}{gl[M_1 + m + (1/3)M](2M_1 + 2m + M)}.$$

Ha ebből a képletből $\cos \varphi < -1$ adódik, maximális kitérésről nem beszélhetünk; ekkor az inga körbefordul.

Benkő Zsigmond (Szolnok, Verseyhy F. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. Az inga közvetlenül ütközés utáni szögsebességét másképp is kiszámíthatjuk. Newton II. törvénye szerint a lövedék lassítását okozó erő időintegrálja megegyezik az ütközés utáni és előtti impulzusok különbségével. Ha τ az ütközés ideje, ω az ütközés utáni szögsebesség és $I(t)$ a t időpontbeli impulzus, akkor:

$$(7) \quad \int_0^{\tau} F dt = I(\tau) - I(0) = m\omega l - mv.$$

Az ingára ható forgatónyomaték idő szerinti integrálja megegyezik az ütközés utáni és előtti impulzusmomentumok különbségével. Newton III. törvénye szerint a lövedéket lassító F erő ellenerejének a forgatónyomatéka hat az ingára. Ha τ igen kicsi, F erőkarja l -nek vehető:

$$(8) \quad \int_0^{\tau} (-Fl) dl = N(\tau) - N(0) = [M_1 + (1/3)M] l^2 \omega.$$

A (7) és (8) egyenletek összevetéséből ω -ra (4)-gyel megegyező kifejezést kapunk.

Czuczor Lajos (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)