

A test tömege a térfogatából és a sűrűségéből meghatározható:

$$(1) \quad m = \frac{4\pi}{3}(r^3 - r_0^3)\rho,$$

ahol  $r_0$  az üreg sugarát,  $\rho$  a gömb anyagának sűrűségét jelöli. A gömb középpontján áthaladó tengelyek közül az üreg középpontján áthaladó tengelyre nézve lesz maximális a tehetetlenségi nyomaték:

$$(2) \quad \Theta = \frac{8\pi}{15}(r^5 - r_0^5)\rho.$$

Osszuk el egymással a két egyenletet és rendezzük a tagokat  $r_0$  hatványai szerint:

$$(3) \quad r_0^5 - \frac{5\Theta}{2m} \cdot r_0^3 + r^3 \left( \frac{5\Theta}{2m} - r^2 \right) = 0.$$

Ez az ötödfokú egyenlet a fizikailag szóba jöhető  $0 < r_0 < 5$  cm intervallumban egy gyökkel rendelkezik, amely két tizedesjegynyi pontossággal  $r_0 = 3,86$  cm. Erről legegyszerűbben a (3) egyenlet bal oldalának grafikus ábrázolásával győződhetünk meg. A test sűrűségét  $r_0$  imént kapott értékének az (1) egyenletbe történő helyettesítése után számíthatjuk ki:  $\rho = 3,54$  g/cm<sup>3</sup>.

A sűrűségmeghatározás pontosságának megbecsülése érdekében írjuk fel az (1) és a (2) egyenletek felhasználásával, hogy  $r$ ,  $r_0$  és  $\rho$  kicsiny változása esetén mennyit változik  $m$ , illetve  $\Theta$ :

$$(4) \quad \frac{3}{4\pi} \cdot \Delta m = 3r^2\rho \cdot \Delta r - 3r_0^2\rho \cdot \Delta r_0 + (r^3 - r_0^3)\Delta\rho,$$

$$(5) \quad \frac{15}{8\pi} \cdot \Delta\Theta = 5r^4\rho\Delta r - 5r_0^4\rho \cdot \Delta r_0 + (r^5 - r_0^5)\Delta\rho.$$

Ebből a két egyenletből  $\Delta r_0$  kiküszöbölésével  $\Delta\rho$  kifejezhető:

$$(6) \quad \Delta\rho = \frac{\frac{15}{4\pi}r_0^2 \cdot \Delta m - \frac{45}{8\pi} \cdot \Delta\Theta + 15r^2\rho(r^2 - r_0^2)\Delta r}{5r^3r_0^2 - 3r^5 - 2r_0^5}.$$

Az egyes mennyiségek változásait azok mérésének abszolút hibáival azonosíthatjuk:  $\Delta m = \pm 0,005$  g,  $\Delta\Theta = \pm 5$  g cm<sup>2</sup> és  $\Delta r = \pm 0,005$  cm. A (6) egyenlet számlálójában álló egyes tagok numerikus értékei:

$$\frac{15}{4\pi}r_0^2 \cdot \Delta m = \pm 0,089 \text{ g cm}^2,$$

$$\frac{45}{8\pi} \cdot \Delta\Theta = \pm 8,96 \text{ g cm}^2.$$

$$15r^2\rho(r^2 - r_0^2)\Delta r = \pm 66,3 \text{ g cm}^2.$$

Látható, hogy a sűrűségmérés hibáját elsősorban a külső gömb sugarának mérési hibája határozza meg, a tömegmérés akár 100-szor nagyobb hibával is történhetett volna.

Célszerű a sűrűség maximális hibáját megadni. A (6) egyenletben a számláló tagjainak előjeleit alkalmasan megválasztva:  $(\Delta\rho)_{\max} = 0,04$  g/cm<sup>3</sup>. A gömb anyagának sűrűsége:  $\rho = (3,54 \pm 0,04)$  g/cm<sup>3</sup>.

**Maróti Péter**