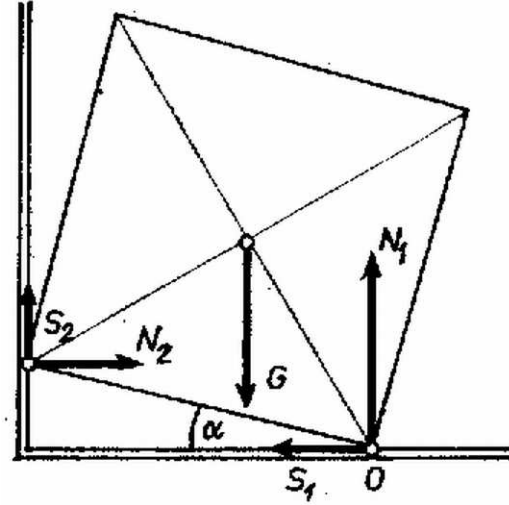


Az egyensúly feltétele, hogy a testre ható erők és forgatónyomatékok vektori összege nulla legyen.



Az erők egyensúlyából (l. az ábrát):

$$(1) \quad G - N_1 - S_2 = 0,$$

$$(2) \quad N_2 - S_1 = 0;$$

az O pontra vonatkozó forgatónyomatékok egyensúlya:

$$S_2 a \cos \alpha + N_2 a \sin \alpha - G(a/\sqrt{2}) \sin (45^\circ - \alpha) = 0,$$

amelyet átalakítva a

$$(3) \quad (G/2)(1 - \operatorname{tg} \alpha) = N_2 \operatorname{tg} \alpha + S_2$$

egyenlethez jutunk.

A súrlódási erőkre érvényes kényszerfeltételek:

$$(4) \quad |S_1| \leq \mu_1 N_1,$$

és

$$(5) \quad |S_2| \leq \mu_2 N_2.$$

a) A továbbiakban megvizsgáljuk, milyen α szögek mellett valósulhat meg egyensúly. Ez nem jelenti azt, hogy ilyen szögekre szükségképpen egyensúly áll fenn, hiszen a kocka esetleg lehelyezhető oly módon is – az éleit megfelelően beszorítva –, hogy felboruljon.

Először az $0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$ esetet vizsgáljuk. $\alpha = 45^\circ$ mellett fennállhat – labilis – egyensúly, ha a fal és a kocka között nem hat erő; α -t csökkentve a kocka egyszer megcsúszik.

Mindaddig, amíg S_1 és S_2 közül legalább az egyik nem éri el a maximális értéket, addig a kocka nem csúszik meg; határesetben S_1 és S_2 is maximális értékű.

Mivel $N_2 \geq 0$ a fal ugyanis csak nyomhatja a kockát –, azért (2) alapján

$$S_1 \geq 0,$$

$|S_1|$ tehát akkor maximális, ha

$$(4^*) \quad S_1 = \mu_1 N_1.$$

$|S_2|$ maximális, ha

$$(5^*) \quad S_2 = \mu_2 N_2,$$

vagy

$$(5^{**}) \quad S_2 = -\mu_2 N_2.$$

Mindkét esetben egy-egy α értékhez jutunk (α_1 és α_2) a következő átalakításokkal:

(5*) alapján S_2 -t $-N_2$ -vel kifejezve – behelyettesítjük a (3) egyenletbe. (4*)-ot és (5*)-ot az (1) és (2) egyenletekbe helyettesítjük, és N_2 -t kifejezzük. Ezt a kifejezést (3)-ba beírva átrendezés után a

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1 - \mu_1 \mu_2}{1 + 2\mu_1 + \mu_1 \mu_2}$$

összefüggéshez jutunk. Hasonlóképpen (5**) felhasználásával a

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{1 + \mu_1 \mu_2}{1 + 2\mu_1 - \mu_1 \mu_2}$$

kifejezést kapjuk.

Mivel azt a legkisebb α határszöget keressük, amelyre még megvalósulhat egyensúly, azért a keresett szög α_1 és α_2 közül a kisebbik, tehát α_1 lesz.

A feladat számadataival:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 0,6901, \quad \alpha_1 = 34^\circ 37'.$$

Ha tehát $\alpha \leq 45^\circ$, akkor az egyensúly feltétele:

$$34^\circ 37' \leq \alpha \leq 45^\circ,$$

és a triviális eset: $\alpha = 0^\circ$.

Tekintsünk az $\alpha > 45^\circ$ esetet. A forgatónyomaték egyenlete ekkor:

$$S_2 a \cos \alpha + N_2 a \sin \alpha + G(a/\sqrt{2}) \sin (\alpha - 45^\circ) = 0,$$

amelyet átalakítva az

$$(6) \quad S_2 = -N_2 \operatorname{tg} \alpha - G \frac{\sin (\alpha - 45^\circ)}{\sqrt{2} \cos \alpha}$$

egyenlethez jutunk.

S_2 nem lehet kisebb, mint $(-\mu_2 N_2)$, ez a feltétel azonban a feladat számadatai mellett $\alpha > 45^\circ$ esetén a (6) alapján számított S_2 értékre nem teljesülhet. Ezért $\alpha > 45^\circ$ esetén nem lehet egyensúly.

Végeredményben tehát az egyensúly a

$$34^\circ 37' \leq \alpha \leq 45^\circ \quad \text{és} \quad \alpha = 0^\circ$$

szögekre állhat fenn.

b) Adott α mellett – amely az egyensúlyi határok közé esik – a feladat sztatikailag határozatlan, mert az (1), (2) és (3) egyenletek négy ismeretlent tartalmaznak. A (4) és (5) egyenlőtlenségek felhasználásával azonban szűkebb korlátokat is megadhatunk a kockára ható erőkre.

Nézzük meg, milyen N_1, N_2, S_1, S_2 értékek tesznek eleget az (1)–(3) egyenleteknek és a (4), (5) egyenlőtlenségeknek. Először tegyük fel, hogy N_1, N_2, S_1, S_2 kielégítik ezeket a feltételeket. Ekkor (1), (2), (3) alapján

$$(7) \quad N_2 = S_1,$$

$$(8) \quad S_2 = (G/2)(1 - \operatorname{tg} \alpha) - S_1 \operatorname{tg} \alpha,$$

$$(9) \quad N_1 = G - S_2 = (G/2)(1 + \operatorname{tg} \alpha) + S_1 \operatorname{tg} \alpha.$$

Ezért (4), (5) folytán S_1 -re teljesülniük kell az alábbi egyenlőtlenségeknek:

$$(10) \quad |S_1| \leq \mu_1 [(G/2)(1 + \operatorname{tg} \alpha) + S_1 \operatorname{tg} \alpha],$$

$$(11) \quad |(G/2)(1 - \operatorname{tg} \alpha) - S_1 \operatorname{tg} \alpha| \leq \mu_2 S_1.$$

Tekintve, hogy az előbbiek szerint csak az $\alpha \leq 45^\circ$, vagyis a $\operatorname{tg} \alpha \leq 1$ esettel kell foglalkoznunk, azért a (11) egyenlőtlenség megoldása:

$$(12) \quad \frac{G}{2} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \alpha - 1}{1 + \mu_2 \operatorname{ctg} \alpha} \leq S_1 \leq \frac{G}{2} - \frac{\operatorname{ctg} \alpha - 1}{1 - \mu_2 \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Továbbá a (10) egyenlőtlenség $S_1 \geq 0$ feltételnek eleget tevő megoldása:

$$(13) \quad 0 \leq S_1 \leq \frac{\mu_1 G}{2} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \mu_1 \operatorname{tg} \alpha}.$$

A (12) és (13) egyenlőtlenségeknek együttesen az alábbi S_1 értékek tesznek eleget:

$$(14) \quad \frac{G}{2} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \alpha - 1}{1 + \mu_2 \operatorname{ctg} \alpha} \leq S_1 \leq \frac{G}{2} \min \left\{ \frac{\operatorname{ctg} \alpha - 1}{1 - \mu_2 \operatorname{ctg} \alpha}; \mu_1 \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \mu_1 \operatorname{tg} \alpha} \right\}.$$

Másrészt könnyen beláthatjuk, hogy ha S_1 a (14) egyenlőtlenségeknek eleget tesz, akkor teljesülnek a (10), (11) egyenlőtlenségek, s így a (7)–(9) alapján számított N_2 , S_2 , N_1 , valamint a (14)-nek eleget tevő S_1 kielégítik az (1)–(3) egyenleteket és a (4), (5) egyenlőtlenségeket.

A feladat számadatai mellett (14) a következő alakú:

$$(15) \quad 2,31 \text{ N} \leq S_1 \leq 2,94 \text{ N}.$$

Ebből a (7)–(9) előállítások figyelembevételével az N_1 , N_2 , S_2 értékekre az alábbi korlátozást nyerjük:

$$(16) \quad 26,77 \text{ N} \leq N_1 \leq 27,29 \text{ N},$$

$$(17) \quad 2,31 \text{ N} \leq N_2 \leq 2,94 \text{ N},$$

$$(18) \quad -0,29 \text{ N} \leq S_2 \leq 0,23 \text{ N}.$$

Frey István (Pécs, Zipernovszky K. Szakközépisk., III. o. t.)