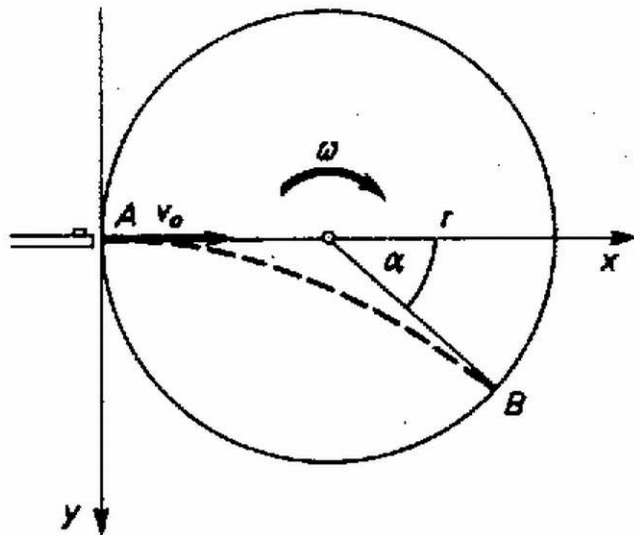


A lövedék az ábrán B -vel jelölt ponton hagyja el a henger belsejét.



Pályája az A és B pontok között parabola, amelyet az ábra szerint felvett koordináta-rendszerben a következő paraméteres egyenletrendszerrel írhatunk fel:

$$\begin{aligned} y &= (g/2)t^2, \\ x &= v_0 t, \end{aligned}$$

ahol x és y a lövedék koordinátái a t időpontban, v_0 pedig az A pontban a lövedék vízszintes irányú kezdősebessége. A papírhenger átlukasztásához szükséges energiát elhanyagoljuk. A lövedék t' idő alatt jut el a B pontba, amelynek koordinátái az α szög segítségével egyszerűen felírhatók. Így

$$\begin{aligned} (1) \quad & (g/2)t'^2 = r \sin \alpha, \\ (2) \quad & v_0 t' = r(1 + \cos \alpha). \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy α elég kicsi, ekkor $\sin \alpha \approx \alpha$ és $\cos \alpha \approx 1$ (ezek 1%-os pontossággal teljesülnek, ha $\alpha < 0,1$.) Ezeknek a közelítéseknek a felhasználásával egyszerűen megoldható egyenletrendszert kapunk. A megoldások:

$$t' = 2r/v_0; \quad \alpha = 2gr/v_0^2.$$

A lövedék akkor üt egy lyukat, ha a henger t' idő alatt úgy fordul el, hogy az A pont kerül B helyére. Az ábrán jelölt forgásirányt véve pozitívnak, a hengernek tehát

$$\alpha \pm (2n+1)\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

szöggel kell elfordulnia. Így a henger szögsebessége

$$\omega = \frac{\alpha \pm (2n+1)\pi}{t'} = \frac{g}{v_0} \pm (2n+1) \frac{\pi v_0}{2r}.$$

Mint említettük, ez a megoldás akkor ad jó közelítést, ha $\alpha < 0,1$ azaz ha $v_0 > \sqrt{20 gr}$.

Győri András (Győr, Révai M. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az (1) és (2) egyenletekből közelítés nélkül is számolhatunk tovább. (2) átrendezése után az egyenleteket négyzetre emeljük, majd összeadjuk:

$$\frac{g^2 t'^4}{4} + v_0^2 t'^2 + r^2 - 2v_0 t' r = r^2 \sin^2 \alpha + r^2 \cos^2 \alpha.$$

A jobb és bal oldalról elhagyjuk r^2 -et, és t' -vel osztjuk az egyenletet, hisz nyilván $t' \neq 0$:

$$(g^2/4)t'^3 + v_0^2 t' - 2v_0 r = 0.$$

Az így kapott hiányos harmadfokú egyenletnek csak egy valós gyöke van, ezt felírhatjuk a Cardano-formula segítségével:

$$t' = \sqrt[3]{\frac{4v_0}{g^2}} \left(\sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 + \frac{4v_0^4}{27g^2}}} + \sqrt[3]{r - \sqrt{r^2 + \frac{4v_0^4}{27g^2}}} \right).$$

Ennek ismeretében α -t is meghatározhatjuk, majd innen a már látott módon ω -t is megkapjuk:

$$\omega = \frac{\arccos(v_0 t' - r) \pm (2n+1)\pi}{t'}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Az így kapott kifejezés azonban nagyon bonyolult.

2. Az (1) és (2) egyenletekből paraméteres alakban egyszerűbb módon kaphatunk összefüggést v_0 és ω között. (2)-ből beírjuk t' -t (1)-be, és átrendezés után v_0 -ra kapjuk:

$$v_0 = \sqrt{\frac{rg}{2 \sin \alpha}} (1 + \cos \alpha).$$

ω felírásához még t' -t is meg kell határoznunk az egyenletrendszerből:

$$t' = \sqrt{\frac{2r \sin \alpha}{g}}.$$

Ennek ismeretében a szögsebesség:

$$\omega = [\alpha \pm (2n+1)\pi] \sqrt{\frac{g}{2r \sin \alpha}}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Ezen képletek segítségével bármely $0 < \alpha < \pi$ -hoz meghatározhatjuk ω -t és v_0 -t. Ha, pl. $\alpha = 90^\circ$, akkor a lövedék kezdősebessége és a henger szögsebessége a következő:

$$v_0 = \sqrt{\frac{rg}{2}}; \quad \omega = \left[\frac{\pi}{2} \pm (2n+1)\pi \right] \sqrt{\frac{g}{2r}}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$