

A gumiszalag nyilvánvalóan úgy repül a legmesszebbre, ha akkor engedjük el a másik végét, amikor mozgásmennyisége a legnagyobb. A gumi mozgásmennyisége kezdetben nulla (nyugalmi helyzet), majd az egyik vég elengedésekor a másik végnél fellépő $k \cdot s$ erő kezd el gyorsítani a súlypontot. Ez az első pillanatban $k \cdot s$ nagyságú erő nullára csökken, miközben a szalag súlypontja fokozatosan gyorsul. Ha egyáltalán nem engedjük el a gumi másik végét, a gumira ható erő előjelet vált és fékezni kezdi a súlypontot.

Kérdés, hogy milyen állapotban van a gumiszalag a végénél ható erő megszűnésének pillanatában, illetve milyen jelenségek zajlanak le az erő nullává válása közben és után. Nyilvánvaló, hogy amennyiben van olyan pillanat, amikor az erő nulla és a szalag teljesen feszültségmentes (megnyújtatlan) állapotban van, akkor ez a legalkalmasabb pillanat az elengedésre, ennél nagyobb impulzusra nem tehet szert a súlypont.

Attól függően, hogy egy rugalmas húr egyik végét milyen módon rezegtetjük meg, különböző hullámhosszúságú hullámok indulhatnak el a húr mentén. Ezek a hullámok lehetnek longitudinálisak vagy transzverzálisak. Minket most csak a longitudinális eset érdekel. A longitudinális hullámok terjedési sebessége

$$c = \sqrt{E/\varrho},$$

ahol ϱ a gumi sűrűsége, E pedig Young modulusza, ami definíció szerint esetünkben (A a gumi keresztmetszetének területe):

$$E = \frac{F/A}{s/l} = k \cdot \frac{l}{A}.$$

A longitudinális „hangsebesség” így

$$c = l \cdot \sqrt{k/m}.$$

Térjünk vissza az eredeti problémához! A gumiszalag megfeszített állapotában a szalag valamennyi keresztmetszetében azonos, $k \cdot s$ nagyságú erő hat. A szalag egyik végének elengedését követő pillanatban a gumi minden része egyensúlyban marad, kivéve az elengedett vég legszélét. Az itt levő gumi gyorsulása igen nagy lesz, mozgása azonban nulla kezdősebességű. Egészen kis idő elteltével már elmozdul a szalag vége, és ezáltal a gyorsuló zóna (olyan része a szalagnak, amelyik nem nulla eredő erőt érez) egyre beljebb terjed. Amikor ez a zóna eléri a gumiszalag másik végét, itt is létrejön egy kis elmozdulás. De könnyen elképzelhető, hogy itt – ha elég közel vagyunk a még rögzített véghez – igen kis elmozdulás is teljes erőmentességhez vezethet. Mivel az első elmozdulás az első hullámfront sebességével, azaz a longitudinális hangsebességgel terjed, a rögzített vég első erőmentessége az elengedés után

$$t = l/c = \sqrt{m/k}$$

idővel következik be.

Amikor az első hullámfront elindul az elengedett végről, ez a vég még nem került teljesen nyugalomba, hanem folyamatosan újabb és újabb hullámfrontok indulnak útra, amelyek egymással interferálva egy komplikáltan leírható hullámképet adnak. Ez azt jelenti, hogy amikor a rögzített vég erőmentes állapotba kerül (ebben a pillanatban a súlypont nem gyorsul), a gumiszalag egésze még lokálisan mozoghat, illetve helyről-helyre (előjel szerint is) változó módon megfeszített állapotban lehet. A rögzített végnél az erő így többször egymás után előjelet válthat, és csak részletes számítással lehetne meghatározni azt, hogy egy-egy ilyen periódus a súlypont sebességét növeli vagy csökkenti-e, sőt az is elképzelhető, hogy néhány negatív hatású periódust egy intenzíven pozitív hatású kompenzálhat.

A részletes számítás elvégzése matematikai nehézségekbe ütközik, azonban kijelenthetjük, hogy a korábban kapott $t = \sqrt{m/k}$ idő jó becslés az optimális elengedés idejére, hiszen ezek az „utóhullámok” már sokkal sűrűbben követik egymást, és impulzusnövelő hatásuk is nagyságrendekkel kisebb.

Megjegyzések. 1. A megoldók általában feltételezték, hogy a második véget addig kell fogni, amíg a szalag feszültségmentessé nem válik. Azonban félrevezető az az indoklás, hogy ebben a pillanatban a szalag összes energiája kinetikus energia.

2. Sokan a szalagot egy „tömegtelen” gumival és egy, az elengedett végre helyezett $(1/3)m$ tömegű (redukált tömeg) tömegponttal helyettesítették (l. pl. K. M. L. 24 (1962) 129.). Ez a kép csak akkor lenne helyes, ha a szalag pontjainak a kitérése a mozgás során végig arányos lenne a nyugalmi helyzeteknek a rögzített végtől való távolságával, ami az idézett cikkben úgy teljesül, hogy egy $M \gg m$ tömegű test is van a rugó végén, és a mozgásban M hatása dominál, m csak kis mértékben hatásos. Természetesen a mi esetünkben is definiálhatunk redukált tömeget, ennek értéke azonban nem $(m/3)$ lesz, hanem $4m/\pi^2 \approx m/2,5$.

3. A részletes és pontos számítás ugyanazt az eredményt adja, mint a megoldásban közölt becslés. Feltételezéseink lényegében helyesek voltak, sőt a valóság még egyszerűbb is. Amikor az első hullámfront eléri a rögzítési pontot és így erőmentes állapotot hoz létre, a gumiszalag teljes egészében feszítetlen állapotba kerül, azaz az utóhullámok teljesen kioltják egymást ebben a pillanatban. Ha nem engedjük el ekkor a szalagot (és feltételezzük, hogy a gumiszalag nem görbülhet meg), akkor az eddigi mozgás tükörképe játszódik le ezután, a szalag hossza s -sel megrövidül. A létrejövő mozgás periódus ideje így $4\sqrt{m/k}$.

4. Gyakorlatban a gumiszalag elengedése nem kíván különleges ügyességet, mert a holtpontra átjutva a gumi meghajlik és súlypontjának impulzusát alig csökkentve gyakorlatilag egyenletes sebességgel halad tovább.