

Vizsgáljunk egy $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ -on l_0 hosszúságú rudat, amelynek egyik végpontja az origóban van. A másik végpont koordinátái $l_x = l_0 \cos \beta$, $l_y = l_0 \cos \gamma$, $l_z = l_0 \cos \delta$. A rúd hossza úgy fog növekedni, mint egy l_x , l_y , l_z oldalakkal rendelkező téglatest testátlója. Ha a rúd origóbéli végpontját rögzítjük, a másik végpont új koordinátái Δt hőmérsékletváltozás után:

$$l_x(1 + \alpha_x \Delta t), \quad l_y(1 + \alpha_y \Delta t), \quad l_z = (1 + \alpha_z \Delta t).$$

A testátló hossza a térbeli Pitagorász-tétel alapján:

$$l = l_0 \sqrt{\cos^2 \beta (1 + \alpha_x \Delta t)^2 + \cos^2 \gamma (1 + \alpha_y \Delta t)^2 + \cos^2 \delta (1 + \alpha_z \Delta t)^2}.$$

Másrészt, ha a rúd lineáris hőtágulási együtthatója α , akkor

$$l = l_0(1 + \alpha \Delta t).$$

A két egyenlőségből négyzetreemelés után kapjuk:

$$1 + 2\alpha \Delta t + \alpha^2 (\Delta t)^2 = \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta + 2\Delta t(\alpha_x \cos^2 \beta + \alpha_y \cos^2 \gamma + \alpha_z \cos^2 \delta) + (\Delta t)^2(\alpha_x^2 \cos^2 \beta + \alpha_y^2 \cos^2 \gamma + \alpha_z^2 \cos^2 \delta).$$

Az egyenlőség mindkét oldalán Δt -nek mint változónak másodfokú polinomja áll. Két polinom akkor és csak akkor egyenlő a változó minden értékére, ha együtthatóik rendre megegyeznek, így a lineáris tagokból nyerjük:

$$\alpha = \alpha_x \cos^2 \beta + \alpha_y \cos^2 \gamma + \alpha_z \cos^2 \delta.$$

A másodfokú tagok együtthatóit egyenlővé téve az

$$\alpha = \sqrt{\alpha_x^2 \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \alpha_z^2 \cos^2 \delta}$$

feltételt kapjuk, ez az érték általában különbözik az előbb nyert értéktől. Ebből következik, hogy a vizsgált rúd hossza pontosan nem az $l = l_0(1 + \alpha \Delta t)$ képlet szerint változik, azonban kis Δt esetében a $(\Delta t)^2$ -es tagok elhanyagolhatóak a Δt -t tartalmazó tagok mellett, tehát az előbb vizsgált másodfokú polinomok kis Δt mellett

$$\alpha = \alpha_x \cos^2 \beta + \alpha_y \cos^2 \gamma + \alpha_z \cos^2 \delta$$

esetén egyenlőknek tekinthetők.

Eszerint a most felírt α érték adja meg a rúd lineáris hőtágulási együtthatóját, ezzel az együtthatóval kis Δt mellett az $l = l_0(1 + \alpha \Delta t)$ képlet szerint számolhatjuk a rúd hosszát.

Tóth Csaba (Sopron, Széchenyi I. Gimn., III. o. t.)