

Ha a csillag fajhője c , akkor ΔT hőmérsékletváltozás esetén energiája

$$\Delta U = c \cdot m \cdot \Delta T$$

értékkel változik meg. Ez az energiaváltozás egyenlő a közben eltelt Δt idő alatt kisugárzott energiával, amit a Stefan-Boltzmann törvény alapján

$$\Delta U = -A \sigma T^4 \cdot \Delta t; \quad (A = 4\pi r^2)$$

alakban írhatunk. A negatív előjel mutatja, hogy az idő múlásával az energia csökken.

ΔU kétféleképpen számított értéke egyenlő:

$$c \cdot m \cdot \Delta T = -A \sigma T^4 \Delta t,$$

ebből

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = -\frac{A \sigma}{cm} T^4.$$

Mivel $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta T / \Delta t)$ a hőmérsékletnek mint az idő függvényének differenciálhányadosa (dT/dt), azért a fenti egyenletből $\Delta t \rightarrow 0$ határatmenettel a következőt kapjuk:

$$dT/dt = -(A \sigma / cm) T^4.$$

Ebből a differenciálegyenletből a keresett $T(t)$ függvény megkapható, ha figyelembe vesszük a $T(0) = T_0$ kezdeti feltételt. A differenciálegyenletet így írhatjuk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^4} \frac{dT}{dt} &= -\frac{A \sigma}{cm}, \\ -\frac{1}{3} \frac{d}{dt} (T^{-3}) &= -\frac{A \sigma}{cm}, \quad \frac{d}{dt} (T^{-3}) = \frac{3A \sigma}{cm}, \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} T^{-3} &= \frac{3A \sigma}{cm} t + C, \\ T &= \left(\frac{3A \sigma}{cm} t + C \right)^{-1/3}. \end{aligned}$$

A $T(0) = T_0$ feltételből következik, hogy $C = T_0^{-3}$, tehát

$$T = \left(\frac{3A \sigma}{cm} t + T_0^{-3} \right)^{-1/3} = T_0 \left(1 + \frac{12r^2 \pi \sigma T_0^3}{cm} t \right)^{-1/3} = \frac{16\,700 \text{ }^\circ\text{K}}{\sqrt[3]{1 + 1,45 \cdot 10^{-16} \text{s}^{-1} t}}$$

Az összefüggésből látható, hogy a csillag hőmérséklete

$$4,8 \cdot 10^{16} \text{ s} \approx 1,5 \text{ milliárd év}$$

alatt csökken a felére.

Kárpáti Gábor (Kaposvár, Táncsics M. Gimn., IV. o. t.)