

I. megoldás. Vizsgáljuk egy ellipszispályán haladó tömegpont mozgását. A rá ható erő a pálya minden pontjában felbontható érintőleges és erre merőleges összetevőre. Ha a vizsgált pontban a görbületi sugár ϱ , a kerületi sebesség pedig v , az erő pályára merőleges összetevője

$$(1) \quad F_{\perp} = mv^2/\varrho.$$

Tekintsünk egy olyan „bolygómozgást”, ahol az F_1 fókuszpontba helyezett M tömegű nap gravitációs terében a m tömegű bolygó a megfelelő ellipszispályát írja le.

A m tömegű test teljes energiája egy P pontban:

$$(2) \quad E = (1/2)mv^2 - \gamma mM/r_1 = -\gamma mM/a,$$

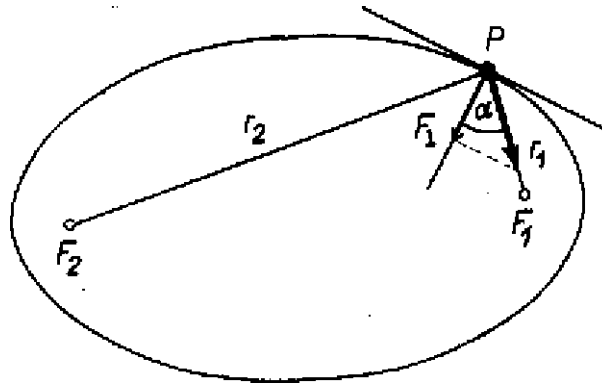
ahol $r_1 = F_1P$, a a fél nagytengely. Innen

$$(3) \quad mv^2 = \gamma mM[(2/r_1) - (1/a)].$$

A gravitációs erőnek a pillanatnyi sebességre merőleges összetevője:

$$(4) \quad F_{\perp} = (\gamma mM/r_1^2) \cos \alpha,$$

ahol α az r_1 vezérsugár és az érintő által bezárt szög pótiszöge (1. ábra).



1. ábra

Az (1) – (4) egyenletekből

$$\varrho = mv^2/F_{\perp} = (r_1^2/\cos \alpha) [(2/r_1) - (1/a)],$$

illetve felhasználva a másik vezérsugárra vonatkozó $r_2 = 2a - r_1$ összefüggést:

$$(5) \quad \varrho = r_1 r_2 / (a \cos \alpha).$$

$\cos \alpha$ meghatározását tekinthetjük geometriai feladatnak, de továbbhaladhatunk „tisztán” fizikai úton is – a Kepler-törvények segítségével.

Kepler II. törvénye értelmében a területi sebesség állandó:

$$(6) \quad (1/2)r_1 v \cos \alpha = \text{áll.} = c.$$

A T keringési idő alatt a rádiuszvektor az egész ellipszis területét végigpásztázza, azaz

$$(7) \quad cT = ab\pi.$$

Kepler III. törvénye szerint a keringési idő csak a fél nagytengelytől függ, tehát egy a sugarú körpályán mozgó test keringési ideje is T . Körpályára:

$$(8) \quad \gamma mM/a^2 = m \left(\frac{2\pi a}{T} \right)^2 / a.$$

(6), (7) és (8)-ból T kiküszöbölésével a

$$(9) \quad \gamma M/r_1^2 = (av^2/b^2) \cos^2 \alpha$$

egyenlethez jutunk, azaz

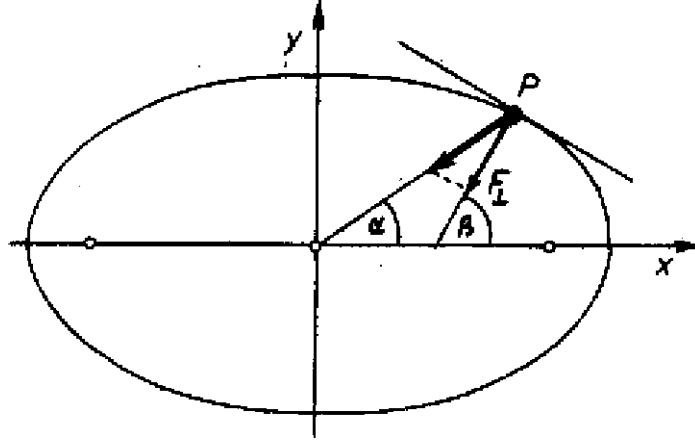
$$(10) \quad \begin{aligned} F_{\perp} &= (\gamma mM/r_1^2) \cos \alpha = mv^2(a/b^2) \cos^3 \alpha, \\ \varrho &= mv^2/F_{\perp} = b^2/(a \cos^3 \alpha). \end{aligned}$$

A Kepler-törvények segítségével – más úton – ismét meghatároztuk a görbületi sugarat.

Az (5) és (10) eredmények ismeretében $\cos \alpha$ geometriai meghatározására már nincs szükség. A kétismeretlenes egyenletrendszert ϱ -ra megoldva végeredményül a

$$(11) \quad \varrho = \frac{(r_1 r_2)^{3/2}}{ab}$$

görbületi sugarat kapjuk.



2. ábra

A 2. ábrán látható koordináta-rendszert használva kapjuk:

$$r_1^2 = (c - x)^2 + y^2, \quad r_2^2 = (c + x)^2 + y^2,$$

így az $a^2 - b^2 + c^2$ azonosság alapján

$$(12) \quad \varrho = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right)^{3/2}.$$

A kért pontokban ϱ rendre 3,6 cm, 16,6 cm, illetve 9,5 cm.

II. megoldás. Vizsgáljuk egy D direkciós erejű rugó végére kötött m tömegű test síkmozgását.

A Newton egyenletet derékszögű koordináta-rendszerben felírva (a mennyiségek fölé írt két pont az idő szerinti második differenciálhányadost jelenti):

$$(1) \quad \begin{aligned} F_x &= -Dx = m\ddot{x}, \\ F_y &= -Dy = m\ddot{y}. \end{aligned}$$

Ezeknek az egyenleteknek van olyan

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= a \sin \omega t, \\ y &= b \cos \omega t, \quad (\omega = \sqrt{D/m}) \end{aligned}$$

megoldása, amely a kívánt ellipszispályát írja le:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1.$$

Tehát megfelelő kezdőpontot és kezdeti sebességet választva az m tömegű test a megadott ellipszispályán fog mozogni.

A sebességkomponensek:

$$(3) \quad \begin{aligned} v_x &= a\omega \cos \omega t, \\ v_y &= -b\omega \sin \omega t. \end{aligned}$$

Az (x, y) pontban az érintő iránytangense:

$$m = v_y/v_x = -(b/a) (\sin \omega t / \cos \omega t) = -(b^2/a^2) (x/y),$$

az erre merőleges egyenes iránytangense a 2. ábra alapján:

$$(4) \quad m' = -(1/m) = (a^2/b^2) (y/x) = \operatorname{tg} \beta.$$

A rugóerő pályára merőleges komponense a 2. ábra alapján

$$(5) \quad F_{\perp} = F \cos(\alpha - \beta) = D\sqrt{x^2 + y^2} \cos(\alpha - \beta),$$

ahol

$$(6) \quad \operatorname{tg} \alpha = y/x.$$

A szögfüggvényekre vonatkozó azonosságok felhasználásával

$$\cos(\alpha - \beta) = [(x^2 + y^2)(x^2/a^4 + y^2/b^4)]^{-1/2},$$

azaz

$$(7) \quad F_{\perp} = \frac{D}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}}.$$

A görbületi sugár meghatározásához még szükség van a sebesség négyzetére. (3)-ból

$$(8) \quad v^2 = \omega^2(a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t) = \omega^2 a^2 b^2 [(x^2/a^4) + (y^2/b^4)].$$

A görbületi sugár tehát az ellipszis (x, y) pontjában:

$$(9) \quad \varrho = \frac{mv^2}{F_{\perp}} = \frac{m\omega^2}{D} a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right)^{3/2} = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right)^{3/2}.$$

Nagy Győző (Jászberény, Lehel Vezér Gimn., II. o. t.)