A feladatban szereplő ideális gáz molszámát az adatok már meghatározzák. Az állapotegyenletből:

$$m/M = n = p_1V_1/RT_1.$$

A felvett hő megállapításához az I. főtételt használjuk:

$$U_B - U_A = Q + W_{\text{külső}},$$

ahol $W_{\text{külső}}$ a külső erők munkája. A gáz által végzett munkát az AB görbe alatti terület adja meg. Ezek szerint:

$$W_{\text{külső}} = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1).$$

A továbbiakban célszerű a cal/(mol $\cdot$ fok) egységekben mért fajhőt, az ún. molhőt használnunk. (Ennek számértéke az egy mol anyag által egységnyi hőmérsékletnövekedés következtében felvett hőt adja meg, jele C.) Képletben

$$\Delta Q = C \cdot (m/M) \cdot \Delta T, \tag{1}$$

ahol ΔQ a kicsiny ΔT-hez tartozó hőfelvétel. Általános esetben C függhet a hőmérséklettől. Az ideális gáz rögzített térfogathoz tartozó állapotváltozása esetén azonban tudjuk, hogy C = állandó = C_V. Az I. főtétel szerint ilyenkor $\Delta Q = \Delta U = C_V(m/M)\Delta T$. A belső energia állapotjelző, ezért minden folyamatra igaz, hogy

$$U_B - U_a = C_V(m/M)(T_B - T_A).$$

Az állapotegyenletet is fölhasználva

$$\Delta U = (C_V/R)(p_2V_2 - p_1V_1).$$

A folyamat során felvett teljes hő tehát

$$Q = \Delta U - W_{\text{külső}} = (C_V/R)(p_2V_2 - p_1V_1) + (1/2)(p_1 + p_2)(V_2 - V_1).$$

A molhő kiszámításakor nem járhatunk el úgy, hogy a fenti hőt osztjuk a $(T_2 - T_1)$ hőmérsékletkülönbséggel, hiszen semmi sem biztosítja azt, hogy a molhő állandó legyen. *A* T hőmérsékletű állapothoz tartozó molhőt úgy kell meghatároznunk, hogy megvizsgáljuk, kis ΔT hőmérsékletváltozás hatására az adott $p(V)$ egyenletű állapotváltozás során mekkora a felvett ΔQ hő, s ezek ismeretében az (1) egyenlet szerint

$$C(T) = (M/m)(\Delta Q/\Delta T).$$

Az első főtétel alapján kifejezzük a kis ΔQ mennyiséget:

$$\Delta Q = C_V(m/M)\Delta T + p\Delta V.$$

Ezt behelyettesítve, a következő általános összefüggést kapjuk:

$$C(T) = C_V + \frac{M}{m} \cdot p(T)\frac{\Delta V(T)}{\Delta T}. \tag{2}$$

Az általunk vizsgált konkrét folyamat $p(V)$ lineáris függvény:

$$p(V) = p_1 + k(V - V_1), \qquad \text{ahol } k = \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1}. \tag{3}$$

Ha ezt behelyettesítjük az állapotegyenletbe, azt kapjuk, hogy

$$\big[p_1 + k(V - V_1)\big]V = (m/M)RT.$$

V-t kifejezve meghatározzuk a térfogat hőmérséklettől való függését:

$$V(T) = -a + \sqrt{a + bT}, \tag{4}$$

ahol

$$a = \frac{p_1}{2k} - \frac{V_1}{2}; \qquad b = \frac{mR}{Mk}.$$

$\Delta V|\Delta T$-t kell még meghatároznunk:

$$\Delta V = \sqrt{a + b(T + \Delta T)} - \sqrt{a + bT} = \sqrt{(a + bT)\left(1 + \frac{b\Delta T}{a + bT}\right)} - \sqrt{a + bT}.$$

ΔT nagyon kicsi, ezért alkalmazhatjuk a

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + (x/2), \;\; x \ll l$$

összefüggést, így

$$\Delta V = \sqrt{a+bT} + \sqrt{a+bT} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b\Delta T}{a+bT} - \sqrt{a+bT} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b\Delta T}{\sqrt{a+bT}}.$$

$\sqrt{a+bT}$-t kifejezzük (4)-ből, és ezzel

$$\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{1}{2} \; \frac{(m/M)(R/k)}{V + (p_1/2k) - (V_1/2)} = \frac{1}{2} \; \frac{m}{M} \; \frac{R}{kV + (1/2)(p_1 - kV_1)}.$$

p-t behelyettesítve, $C(T)$-re a következő összefüggést kapjuk:

$$C(T) = C_V + \frac{kV(T) + p_1 - kV_1}{kV(T) + (1/2)(p_1 - kV_1)} \cdot \frac{1}{2} R.$$

$C(T)$ tehát nem állandó, hiszen V a (4) egyenlet szerint függ a hőmérséklettől.

Abban a speciális esetben, ha a $p(V)$ egyenes átmegy az origón, tehát ha $p(0) = 0$,

$$p_1 - kV_1 = 0,$$

s ilyenkor

$$C = C_V + (1/2)R$$

a hőmérséklettől függetlenül.

Tél Tamás

Megjegyzések. 1. Az általánosan érvényes (2) egyenletből könnyen megkapható a $C_p - C_V = R$ összefüggés is. Izobár változásokra ugyanis $p\Delta V = (m/M)R\Delta T$, s ezt behelyettesítve $C_p = C_V + R$.

2. A megoldások között több nagyon alapvető hiba is előfordult. Az egyik a hőmérséklet és a hő fogalmának összekeverése! A másik gyakori hiba az volt, hogy a megoldók egy része az AB állapotváltozás helyett egy izobár és egy izochor folyamat összegét vizsgálta. A belső energia állapotjelző, ezért a belső energia szempontjából a két változás egyenértékű. A hő (és a munka) azonban nem állapotjelző, különböző $p(V)$ függvényekkel leírható állapotváltozásokra egészen más értékeket vesz föl a kezdő és végállapotot összekötő pályától függően. Az ezeket a hibákat elkövető versenyzők nem kaptak pontot.