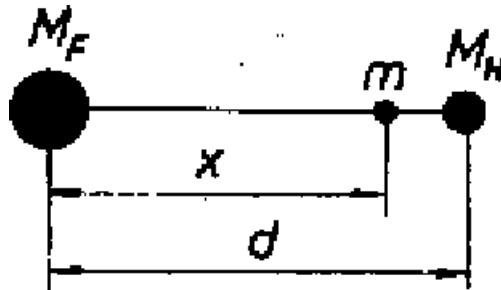


Olyan mesterséges égitestet akarunk létrehozni, mely a Holdnak ugyanazon pontja fölött található. Mivel a Holdnak mindig ugyanaz az oldala fordul a Föld felé, ez csak úgy lehetséges, hogy a mesterséges égitest egy olyan mesterséges hold, amely a Hold pályasíkjában, a Holdéval megegyező szögsebességgel kering a Föld körül.

A Föld–Hold rendszer tömegközéppontja közel esik a Föld középpontjához, így nem követünk el nagy hibát, ha úgy számolunk, mintha a Hold az álló Föld középpontja körül körpályán keringene. A mesterséges égitestet csak a Föld és a Hold középpontját összekötő centrálison helyezhetjük el, mivel a rá ható erők eredőjének a Föld középpontja felé kell mutatnia. Három helyzet lehetséges (1–3. ábra).

a) Az m tömegű mesterséges hold a Föld és a Hold között, a Földtől x távolságra helyezkedik el (1. ábra).



1. ábra

A körmozgáshoz szükséges centripetális erőt a Föld és a Hold vonzóerejének eredője biztosítja:

$$(1) \quad f \frac{M_F m}{x^2} - f \frac{M_H m}{(d-x)^2} = m x \omega^2.$$

ω megegyezik a Hold szögsebességével, így a Holdra vonatkozó hasonló egyenletből határozható meg:

$$(2) \quad f \frac{M_F M_H}{d^2} = M_H d \omega^2.$$

A két egyenletből ω -t kiküszöbölve

$$\frac{M_F}{x^3} - \frac{M_H}{(d-x)^2 x} = \frac{M_F}{d^3},$$

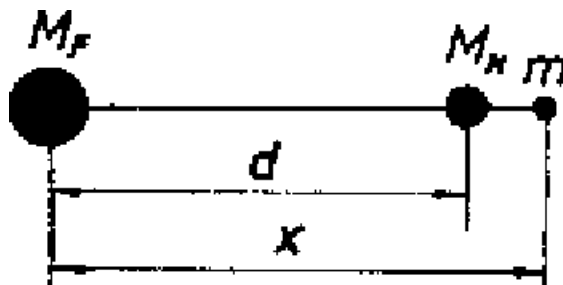
$M_F/M_H = c \approx 81,3$ és $x/d = \alpha$ helyettesítéssel

$$(3) \quad c - \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^2 = c \alpha^3.$$

Ennek az egyenletnek 0 és 1 közé eső gyökét valamilyen közelítő módszerrel kereshetjük meg. c numerikus értékét behelyettesítve (3)-at így is írhatjuk:

$$81,3 = 81,3 \alpha^3 + \left[\frac{1}{1-\alpha} - 1 \right]^2.$$

Ennek az egyenletnek a jobb oldalán álló kifejezés a $[0, 1)$ intervallumban α -nak szigorúan monoton növekedő függvénye, a függvény értéke $\alpha = 0$ esetén 0, $\alpha = 1$ -ben a baloldali határértéke pedig $+\infty$. Ezért a szóbanforgó folytonos függvény a $[0, 1)$ intervallumban pontosan egy helyen felveszi a 81,3 értéket, azaz a fenti egyenletnek pontosan egy gyöke van a $[0, 1)$ intervallumban. Közelítő számítással a gyökre $\alpha \approx 0,849$ adódik, tehát a mesterséges égitest a Föld középpontjától $3,27 \cdot 10^5$ km, a Hold középpontjától $0,58 \cdot 10^5$ km távolságra kering.



2. ábra

b) Ha a mesterséges hold a Hold túlsó oldalán van (2. ábra), az (1) egyenlet a következő alakot ölti:

$$(4) \quad f \frac{M_F m}{x^2} + f \frac{M_H m}{(x-d)^2} = m x \omega^2.$$

(2) felhasználásával és az előbbi helyettesítésével

$$(5) \quad c + \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} \right)^2 = c \alpha^3$$

egyenlet adódik, amelynek 1-nél nagyobb megoldása $\alpha \approx 1,168$. (Az a tény, hogy (5)-nek pontosan egy 1-nél nagyobb gyöke van, (5) alábbi alakjából következik a fentiekhez hasonló módon:

$$\frac{81,3}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha(\alpha - 1)^2} = 81,3.$$

Tehát a szinkron mesterséges hold a Hold túlsó oldalára a Földtől $4,50 \cdot 10^5$ km, a Holdtól $0,65 \cdot 10^5$ km távolságra is elhelyezhető.

c) A mesterséges hold elvileg elhelyezhető a Földnek a Holddal átellenes oldalán is (3. ábra).



3. ábra

Ekkor

$$(6) \quad f \frac{M_F m}{x^2} + f \frac{M_H m}{(d+x)^2} = m x \omega^2,$$

ahonnan (2) felhasználásával

$$(7) \quad c + \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1} \right)^2 = c \alpha^3.$$

Megoldva az egyenletet, $\alpha \approx 1,001$, adódik, tehát a Hold hatása gyakorlatilag elhanyagolható, a mesterséges hold a Holdnál alig nagyobb sugarú pályán kering.

Vancsó Ödön (Gödöllő, Török I. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Vizsgáljuk meg, mennyire változtatja meg az eredményeket, ha figyelembe vesszük, hogy a Hold és a mesterséges hold nem a Föld középpontja, hanem a Föld–Hold rendszer tömegközéppontja körül kering (a mesterséges hold tömege a Föld és a Hold tömegéhez képest elhanyagolható).

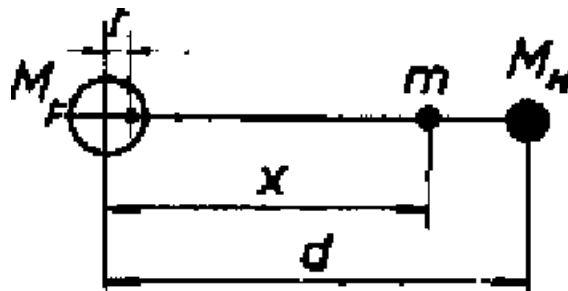
Legyen a tömegközéppont r távolsága a Föld középpontjától. Ekkor

$$(8) \quad M_F / M_H = (d - r) / r,$$

ahonnan

$$(9) \quad \beta = r/d = 1/(1 + c).$$

Vizsgáljuk meg pl. azt az esetet, amikor a mesterséges hold a Föld és a Hold között helyezkedik el (4. ábra).



4. ábra

Ekkor az (1)-nek és (2)-nek megfelelő egyenletek

$$(10) \quad f \frac{M_F m}{x^2} - f \frac{M_H m}{(d-x)^2} = m(x-r)\omega^2,$$

$$(11) \quad f \frac{M_F M_H}{d^2} = M_H(d-r)\omega^2.$$

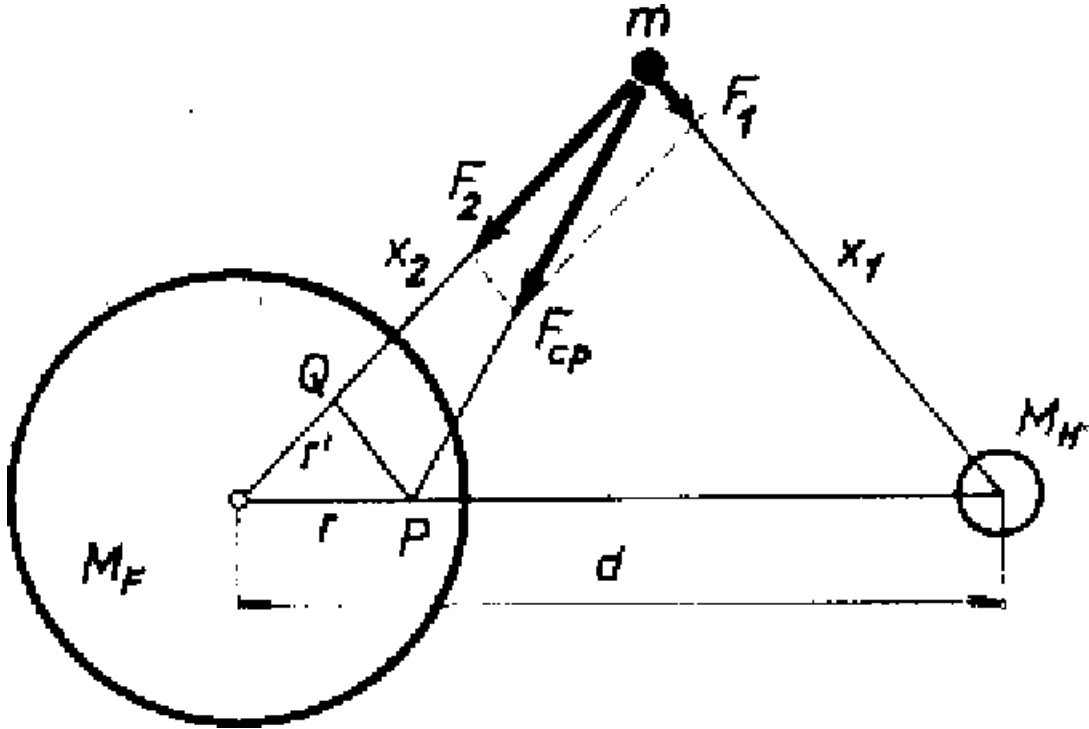
ω -t kiküszöbölve $\alpha = x/d$ -re az alábbi egyenlet adódik:

$$(12) \quad c \left(\frac{\alpha}{\alpha - \beta} \right) - \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha - \beta} \right) = c\alpha^2 \frac{\alpha}{1 - \beta},$$

amelynek megoldása $\alpha \approx 0,851$ – alig tér el az r elhanyagolásával kapott $\alpha \approx 0,849$ értéktől. A másik két helyzetben az eltérés még kisebb.

Kisvárdai László József (Csongrád, Batsányi J. Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján

2. Ha figyelembe vesszük, hogy a mesterséges égitest nem a Föld, hanem a középpontjától r távolságra levő tömegközéppont körül kering, akkor a gravitációs erők eredője akkor is mutathat a középpont felé, ha a Föld, a Hold és a mesterséges hold nem esik egy egyenesbe (5. ábra).



5. ábra

Legyen PQ párhuzamos a Holdat a mesterséges égitesttel összekötő egyenessel. Ekkor

$$(13) \quad r'/r = x_2/d,$$

$r = d/(1 + c)$ felhasználásával

$$(14) \quad r' = x_2/(1 + c).$$

Háromszögek hasonlóságából

$$(15) \quad \frac{F_2}{F_{cp}} = \frac{x_2 - r'}{x}.$$

$F_2 = fM_F m/x_2^2$, $F_{cp} = mx\omega^2$, így (15)-ből (14)-et is felhasználva

$$\frac{f \frac{M_F m}{x_2^2}}{mx\omega^2} = \frac{x_2 - \frac{x_2}{1+c}}{x}, \quad \text{ahonnan}$$

$$x_2^3 = \frac{fM_F(1+c)}{c\omega^2}.$$

ω -t (11)-ből behelyettesítve

$$x_2 = d$$

adódik. Hasonlóan belátható, hogy $x_1 = d$, vagyis a mesterséges hold úgy is elhelyezhető a Hold pályasíkjában, hogy a Földdel és a Holddal egyenlő oldalú háromszöget alkosson. Természetesen két ilyen helyzet lehetséges.

Faragó Béla (Csongrád, Batsányi J. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján