

A henger forgatásakor a súlyerőt a testre ható centrifugális erő helyettesíti. (A hengerrel együttforgó koordináta-rendszerből írjuk le a helyzetet.) Az ebből származó gyorsulás a tengelytől való távolság függvényében $a = r \cdot \omega^2$. A paláston

$$R\omega^2 = g,$$

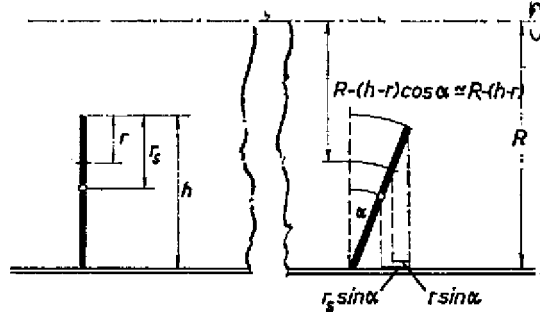
tehát

$$\omega = \sqrt{g/R} = 0,991/\text{s} \sim 11/\text{s}.$$

A rúd súlyának a kiszámításához osszuk fel a rudat olyan kis Δr hosszúságú darabokra, hogy azok hosszán belül a „nehézségi” gyorsulás változása már elhanyagolható legyen! Ekkor a test súlya úgy írható fel, hogy

$$\begin{aligned} G &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \Sigma a(r_i) \Delta m = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \Sigma (R - h + r_i) \omega^2 \varrho \Delta r A = \\ &= \int_0^h (R - h + r) \omega^2 A \varrho \, dr = m \omega^2 R (1 - h/2R) = 9 \text{ kp}, \end{aligned}$$

(ahol A a keresztmetszet, ϱ a sűrűség).



Egy test súlypontján a testre ható súlyerő támadáspontját értjük. Más szóval, ha a G erő itt támad, akkor a forgatónyomatéka egyenlő a rúd egyes részeire ható erők forgatónyomatékainak az összegével (l. a megjegyzést). A koordináta-rendszer kezdőpontjának a rúdnak a tengelyhez közelebbi végét véve nyerjük:

$$\begin{aligned} G \cdot r_s &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \Sigma (R - h + r_i) r_i \omega^2 \varrho A \Delta r = \\ &= \int_0^h (R - h + r) r \omega^2 A \varrho \, dr = A \varrho \omega^2 [(R - h)(h^2/2) + h^3/3], \end{aligned}$$

innen

$$r_s = \frac{h(1 - h/3R)}{2(1 - h/2R)} = 28/27 \text{ m} \approx 1,037 \text{ m}.$$

Tehát a rúd súlypontja a henger palástjától, azaz a „talajtól” 0,963 méterre van.

Lájer Konrád (Tapolca, Batsányi J. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Számos megoldó rosszul értelmezte a súlypont fogalmát. A legáltalánosabb hiba az volt, hogy a súlypontot és a tömegközéppontot (a továbbiakban *sp* ill. *tkp*) azonosnak vették, illetve a két fogalmat összekeverték, és a *tkp*-ra vonatkozó tételeket sem alkalmazták helyesen.

A *tkp* definíció szerint az a pont, amelynek a helyvektora $r_{tkp} = \frac{\Sigma m_i r_i}{\Sigma m_i}$. Erről tudjuk, hogy úgy mozog, mintha a rendszer egész tömege ebbe a pontba lenne sűrítve, és a rendszerre ható külső erők ΣF_k eredője erre a pontra hatna. Ezt például felhasználhatjuk a G meghatározásához: a homogén rúd *tkp*-ja a felében van, ez a pont a kényszerek miatt egy $(R - (h/2))$ sugarú körpályán mozog, tehát $G = \Sigma F_k = (R - (h/2)) \omega^2 m$. De hibás az az okoskodás, hogy az m tömegű $(R - (h/2))$ helyen levő tömegpontra $(R - (h/2)) \omega^2 m$ erő hat, tehát a súly $(R - (h/2)) \omega^2 m$. Példánkban ugyanazt az eredményt kapjuk, de ez csak a gyorsulás lineáris helyfüggésének köszönhető. Ha azonban a nehézségi gyorsulás helyfüggése más, mint pl. gravitációs erőterben nagy távolságok esetén, az említett gondolatmenet rossz eredményre vezet. A helyes okoskodás a következő: $g(r) = \gamma M_F / r^2$, így a Föld középpontja felé mutató rúd súlya

$$\gamma M_F A \varrho \int_R^{R+h} (1/r^2) dr = \frac{m M_F \gamma}{R(R+h)} \neq \frac{M_F m \gamma}{[R + (h/2)]^2}.$$

Itt jól látszik, hogy a rendszerre ható külső erők kiszámítását és a tömegek *tkp*-ba való sűrítését nem szabad fölcserélni.

A *sp* szabatos definiálása helyfüggő erőterben, amilyen példánkban is szerepel, nehéz. Ha ugyanis úgy definiáljuk, hogy a súlyvonalak metszéspontja, akkor esetleg nem is kapunk egy pontot: a test forgatásával az erők nagysága

is megváltozhat, és így a súlyvonalak több metszéspontot is adhatnak. A legkézenfekvőbb meghatározás az, amit a feladat megoldásában adtunk, de ez önmagában még nem teljes: az eredő erő a hatásvonalában eltolható, ettől a forgatónyomatéka nem változik, tehát a hatásvonal minden pontja vehető a súlyerő támadáspontjának. Belátható, hogy a testet kicsi (!) szöggel elforgatva a súlyerő új és régi hatásvonalának a metszéspontja első közelítésben a szögtől független. Ezt a pontot nevezhetjük az adott helyzetben a test *sp*-jának. Ez a meghatározás hasonlít a homogén térben célszerű meghatározáshoz, de itt lényeges, hogy a súlyvonalak szöge kicsiny. Példánkban a rúd függőleges helyzetében a súlyerő hatásvonala a rúd tengelye. A rudat kicsi a szöggel elforgatva, a rúd egyes pontjainak a tengelytől való távolsága csak α -ban másodrendben változik, így az erők nagyságának a változása elhanyagolható. Az új helyzetben felírható forgatónyomaték-egyenletből a szögfüggvény kiesik (l. az ábrát), így lapjuk a megoldásban felírt egyenletet.

Sok megoldó úgy okoskodott, hogy a *sp*-on átmenő síkok a testet azonos súlyú részekre osztják. Ez még homogén erőterben is csak speciális esetekben igaz: gondoljunk két különböző tömegű test közös *sp*-jára: az valahol a két test között a tengelyen van, és a *sp* két oldalán a testek súlya különböző.

Woynasrovich Ferenc