

Alkalmazzuk az m tömegű test mozgására Newton II. törvényét! A mozgást meghatározó egyenlet felírásánál két esetet kell megkülönböztetnünk attól függően, hogy a test csúszik (1) vagy pedig tapad (2) a szalagon:

$$(1) \quad \begin{aligned} a' &= -\omega^2 x' + \mu g, \\ v' &= v. \end{aligned}$$

Itt a' a test gyorsulása, v' a sebessége, x' pedig a rugó egyensúlyi helyzetétől mért kitérése; $\omega^2 = D/m$. Az első esetben az egyenlet megoldása harmonikus rezgőmozgás:

$$(3) \quad \begin{aligned} x' &= A \cdot \sin(\omega t + \delta) + x_0, \\ v' &= A\omega \cdot \cos(\omega t + \delta), \\ a' &= -A\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \delta). \end{aligned}$$

Az (1) egyenletbe való helyettesítéssel kapjuk, hogy $x_0 = \mu g / \omega^2$; A és δ később meghatározandó állandók. Ez a megoldás akkor lesz érvényes, ha a kapott v' érték kisebb a szalag haladási sebességénél:

$$(4) \quad v' < v.$$

Abban az esetben, amikor a test sebessége túllépné ezt az értéket (a test lehamná a szállítószalagot), a szalag és a test együtt mozog és a test megtapad a szalagon (a gyakorlatban $\mu_0 > \mu$). A (2) egyenlet egyenletes mozgást ír le:

$$(5) \quad \begin{aligned} x' &= v \cdot t + x^*, \\ v' &= v, \\ a' &= 0, \end{aligned}$$

ahol x^* ismeretlen állandó. Ez a megoldás érvényes, amikor a testre ható rugóerő ($|F| = D \cdot x'$) kisebb, mint a tapadási súrlódás maximális értéke ($S_0 = \mu_0 mg$). Az $F < S_0$ feltételből jelöléseinkkel az

$$(6) \quad x' < \frac{\mu_0 g}{\omega^2}$$

egyenlőtlenséget kapjuk.

Látható, hogy a megoldást – a súrlódásos feladatokra általában jellemző módon – a mozgást leíró egyenletek és az ezen egyenletek érvényességét megszabó egyenlőtlenségek adják.

Az ismeretlen állandókat (A, δ, x^*) és az egyes mozgásfajták időtartamát a határesetekre vonatkozó folytonossági feltételekből kell meghatározni.

Legyen $t = 0$ az az időpont, amikor a test éppen kezdi a rezgőmozgást! Ekkor a (6) feltétel egyenlőség formáját ölti és az (5) egyenletrendszer első egyenletével együtt meghatározza x^* -ot:

$$x^* = \frac{\mu_0 g}{\omega^2}.$$

Nyilvánvaló, hogy egy test út – idő grafikonja folytonos vonal, tehát a (3) és (5) egyenletrendszer első egyenletei az átmenet pillanatában x' -re ugyanazt értéket kell, hogy adják:

$$A \cdot \sin \delta + x_0 = x^*.$$

Hasonló módon folytonos függvény a sebesség is, mert nulla idő alatt véges sebességváltozás végtelen nagy erőt feltételez (ezt csak a különböző ütközési feladatoknál szokták elméletben megengedni). A (3) és (5) egyenletrendszer második egyenleteinek jobb oldalai egyenlők:

$$A\omega \cdot \cos \delta = v.$$

Az utóbbi két összefüggésből kapjuk a hiányzó paramétereket:

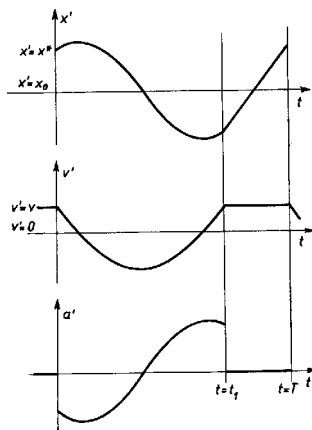
$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\mu_0 - \mu}{v \cdot \omega} \cdot g, \quad A = \frac{1}{\omega} \sqrt{v^2 + \left[(\mu_0 - \mu) \cdot \frac{g}{\omega} \right]^2}.$$

A harmonikus rezgőmozgás a $t = t_1$ időpontban fejeződik be, amikor a (4) feltétel egyenlőségbe megy át:

$$v = -A\omega \cdot \cos(\omega t_1 + \delta).$$

Ez az egyenlet az előbb meghatározott mennyiségek ismeretében megadja t_1 értékét.

A mozgást jellemző időfüggvényeket az 1. ábrán tüntettük fel.



1. ábra

Látható, hogy a t_1 időpontban $x' = x_0 - (x^* - x_0)$. A $t = T$ időpontig az egyenletes v sebességgel haladó test helykoordinátája erről az értékről x^* -ra növekszik. Az

$$x^* - [x_0 - (x^* - x_0)] = 2 \cdot (x^* - x_0)$$

út megtételéhez

$$T - t_1 = 2 \frac{x^* - x_0}{v}$$

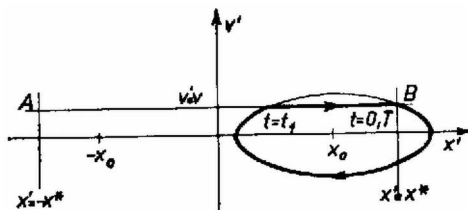
idő szükséges. Ebből az egyenletből a T periódusidőt számíthatjuk ki.

Végeredményben a test mozgását a következőképpen írhatjuk le. A $t = 0$ időpontban a szállítószalag és a test közötti tapadási súrlódás már nem képes egyensúlyozni a rugóerőt és a test v kezdősebességgel rezgőmozgásba kezd, amelynek körfrekvenciáját a rugóállandó és a test tömege, egyensúlyi helyzetét pedig a csúszó súrlódás határozza meg. Ez a rezgőmozgás megszűnik, amikor a sebesség ismét v lesz; a tapadó súrlódási erő kiegyensúlyozza a rugóerőt és a test mindaddig egyenletes mozgást végez, amíg helykoordinátája ismét x^* nem lesz. Ezután a mozgás periodikusan ismétlődik.

Tantalics Béla (Lenti, Gimnázium, III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Megvizsgálhatjuk azt is, hogy a fentebb leírt periodikus mozgás hogyan indul meg. A diszkussziót szemléletessé tehetjük az elméleti fizikában egyébként gyakran használt sebesség – út grafikon segítségével.

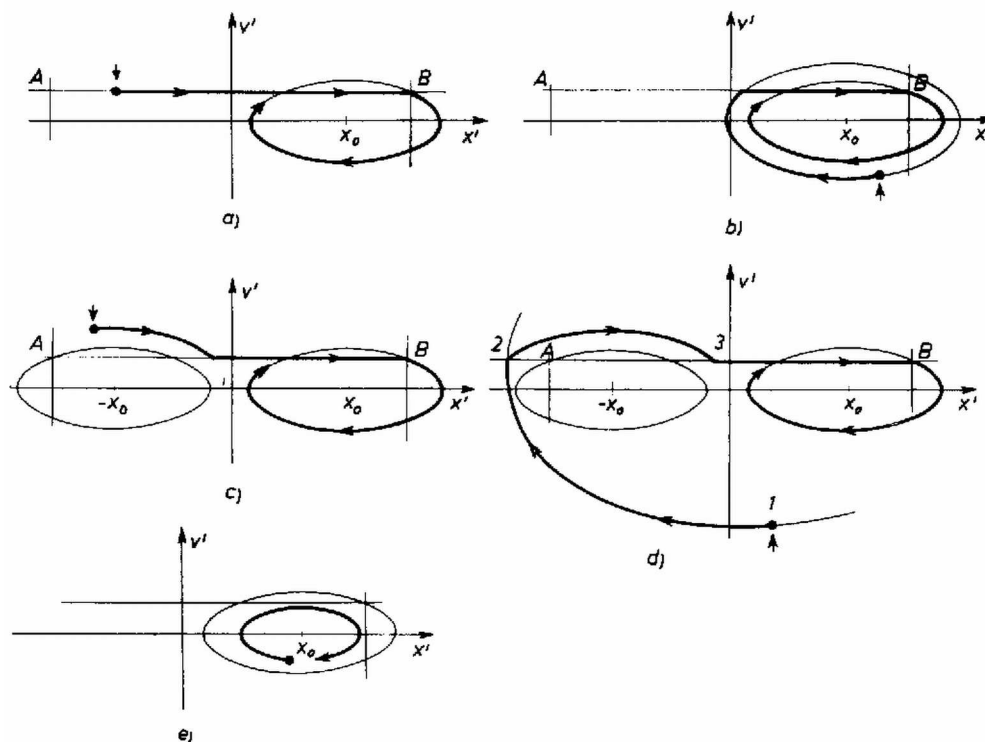
Ha egy koordináta-rendszer vízszintes tengelyére a test helykoordinátáját; függőleges tengelyére a test sebességét mérjük fel, az így kifeszített sík minden pontja a test egy mozgásállapotának felel meg. A helyzetben és sebességben egymás után bekövetkező változásoknak megfelelően az állapotot jellemző pont a síkon mozog és egy görbét ír le. (A görbe mentén feltüntethetjük az adott mozgásállapot bekövetkezésének időpontját.) Egyenesvonalú egyenletes mozgásnál ez a görbe egy vízszintes egyenes ($v' = \text{áll.}$, x' változik); periodikus mozgásnál önmagába visszatérő zárt görbe; tiszta harmonikus rezgőmozgásnál egy ellipszis, amelynek nagytengelye az amplitúdó, kistengelye $\text{amplitúdó} \cdot \omega$. A megoldásban tárgyalt periodikus mozgásnak megfelelő görbe egy adott nagyságú ellipszis, melynek egy szelete le van hasítva (2. ábra).



2. ábra

A kezdeti v' és x' érték az állapotsík egy pontját jelöli ki. A kérdést úgy fogalmazhatjuk meg, hogy ebből a pontból milyen módon jut a test állapota a 2. ábrán látható görbére?

Legegyszerűbb eset, ha kezdetben a testet valamilyen x' helyen (pl. $x' = 0$ -nál vagy $x' = x_0$ -nál) $v' = v$ sebességgel a szalagra rakjuk. Ha a kezdeti helyzet teljesíti a $-x^* < x' < x^*$ feltételt (a kezdeti helyzetnek megfelelő pont az AB szakaszon van), akkor a tapadási súrlódás a testet az $x' = x^*$ helyre szállítja és a mozgás a továbbiakban periodikus. (3a. ábra; nyíllal jelölve a kezdeti állapot.)



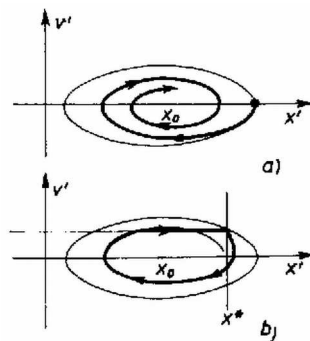
3. ábra

Ha a test állapotát jelző pont kezdetben nincs rajta a fent meghatározott egyenesen, akkor induláskor a test csúszik és harmonikus rezgőmozgást végez, melynek amplitúdója tetszőleges lehet. Az állapotgörbe szintén ellipszis, melynek középpontja x_0 , ha $v > v'$ és $-x_0$, ha $v < v'$ (az ellipszis középpontjának helyzetét a csúszó súrlódási erő iránya határozza meg). Legyen először kezdetben $v' < v$. Ekkor, miután az induló ellipszis eléri az AB egyenest, a mozgás az egyenesen folytatódik és végül rátalál a periodikus mozgásra (3b. ábra). Ha kezdetben $v' > v$, akkor is lehetséges a fenti folyamat (3c. ábra).

Mi a helyzet akkor, ha az induló ellipszis nem metszi az AB egyenest? (Fizikailag ez azt jelenti, hogy a testet kezdetben erősen meglöktük.) Az amplitúdó olyan nagy, hogy a $v' = v$ feltétel teljesülésekor a tapadási súrlódás maximális értéke sem elég a rugóerő kompenzálására és a test továbbhalad. Ebben a pillanatban azonban a csúszó súrlódási erő előjelet vált és tovább fékezi a test mozgását. Ez a folyamat többször is megismétlődhet, míg az amplitúdó annyira lecsökken, hogy a tapadó súrlódás képes lesz a test sebességét a szalag sebességével egyenlővé tenni. A 3d. ábrán láthatjuk a folyamatot egy egyszerűbb esetben. Az 1 – 2 görbe egy x_0 középpontú ellipszis darabja. A 2 – 3 szakasz egy $-x_0$ középpontú ellipszisdarab.

Végül lehetséges, hogy a test kezdetben az x_0 pontban áll vagy nagyon kis amplitúdójú rezgéseket végez. Ekkor sebessége mindig kisebb lesz a szalag sebességénél, és a tapadás sohasem következik be; a test egyszerű rezgőmozgást végez és a súrlódás csak a mozgás középpontját határozza meg. Ilyen pl. a 3e. ábrán látható eset.

2. A probléma gyakorlati szempontból akkor érdekes, ha a rezgést valamilyen hatás csillapítja (pl. a vonóval rezgésbe hozott húr, amikor az energia egy része hang formájában kisugárzódik). Ilyen esetben pl. a rezgőmozgás állapotgörbéje csökkenő amplitúdójú (4a. ábrán látható görbe); a csúszó és tapadó súrlódás közötti különbség teszi lehetővé a mozgás fenntartását (4b. ábra).



4. ábra

A vonó gyantázásával ez a különbség – és ezzel a rezgés amplitúdója – növelhető. Hasonló a helyzet, amikor az üvegpohár szélét nedves ujjunkkal dörzsölve hangot hallunk; a tapadó és csúszó súrlódás közötti különbséget itt az a vékony folyadékfilm okozza, ami a két felület között kialakulhat.

Mihály László