

A fizikai inga lengésidejét kis kitérésű lengések esetén a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_0}{mgs}}$$

összefüggés adja meg, ahol  $\Theta_0$  a lengő test tehetetlenségi nyomatéka a felfüggesztési pontra vonatkoztatva,  $m$  a lengő test tömege,  $s$  pedig a felfüggesztési pont és a súlypont távolsága ( $g$  a nehézségi gyorsulás).

Feladatunk  $\Theta_0$  (a sokszög egyik csúcspontjára, a felfüggesztési pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték) meghatározása. Ehhez a Steiner-tételt kell felhasználnunk, amely a következő:

$$\Theta_0 = \Theta_s + md^2,$$

ahol  $\Theta_s$  a súlyponton áthaladó tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték,  $\Theta_0$  pedig az előző tengellyel párhuzamos, tőle  $d$  távolságra lévő másik tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték ( $m$  a test tömege).

Egy  $m$  tömegű,  $L$  hosszúságú vékony pálca (rúd) tehetetlenségi nyomatéka a súlypontján átmenő merőleges tengelyre vonatkoztatva

$$(1/12)mL^2.$$

A Steiner-tétel alapján az  $n$  oldalú sokszög egyik oldalát alkotó  $m$  tömegű rúd tehetetlenségi nyomatéka a sokszög középpontjára vonatkoztatva

$$(1/12)mL^2 + m((L/2)\text{ctg}\gamma)^2 = (1/4)mL^2(1/3 + \text{ctg}^2\gamma),$$

ahol  $\gamma = 180^\circ/n$ ,  $(L/2)\text{ctg}\gamma$  a középpont és az oldal felezőpontjának távolsága. A sokszög tehetetlenségi nyomatéka a középpontra vonatkoztatva így

$$\Theta_s = (1/4)mnL^2(1/3 + \text{ctg}^2\gamma).$$

Mivel a középpont éppen a súlypont, ismét alkalmazhatjuk a Steiner-tételt. A csúcs és a középpont távolsága  $L/(2\sin\gamma)$ , azaz

$$\Theta_0 = \Theta_s + nm\left(\frac{L}{2\sin\gamma}\right)^2 = \frac{1}{2}mnL^2\left(\frac{1}{\sin^2\gamma} - \frac{1}{3}\right).$$

Így a fizikai inga lengésideje kis kitérésű lengések esetén

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_0}{mgL/(2\sin\gamma)}} = 2\pi\sqrt{n\frac{L}{g}\left(\frac{1}{\sin\gamma} - \frac{\sin\gamma}{3}\right)}$$

( $\gamma = 180^\circ/n$ ).

Néhány esetben ( $L = 1$  m) a lengésidő:

$$\begin{aligned} n = 2 & \quad T \approx 2,32 \text{ s,} \\ n = 3 & \quad T \approx 3,23 \text{ s,} \\ n = 4 & \quad T \approx 4,35 \text{ s,} \\ n = 5 & \quad T \approx 5,50 \text{ s,} \\ n = 6 & \quad T \approx 6,65 \text{ s,} \\ n = 8 & \quad T \approx 8,94 \text{ s.} \end{aligned}$$

Ha a sokszög oldalszámát növeljük,  $T$  egyre nagyobb lesz,  $n \rightarrow \infty$  esetén végtelenhez tart. Ennek az az oka, hogy a sokszög oldala mindig adott  $L$  hosszúságú. Ha azonban nem  $L$  értékét rögzítjük, hanem a körülírt kör  $R$  sugarát, az

$$L = 2R\sin\gamma$$

értéket behelyettesítve  $n \rightarrow \infty$  ( $\gamma \rightarrow 0$ ) határesetben megkapjuk a

$$T = 2\pi\sqrt{2R/g}$$

eredményt, amely megegyezik az  $R$  sugarú vékony körgyűrű lengésidejével, ha azt a kerületén függesztjük fel.

Vass Albert (Csongrád, Batsányi J. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján