

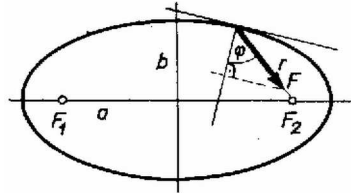
Az ellipszispályát a kérdéses pontokban helyettesíthetjük a megfelelő görbületi körökkel. Ekkor az ellipszispályán való tartáshoz

$$(1) \quad F'_m = m \cdot v^2 / \varrho$$

nagyságú erő szükséges, ahol ϱ a görbületi sugár. A görbületi sugár meghatározása általában differenciálgeometriai úton történhet, ez azonban magasabb matematikai ismereteket igényel.

A probléma megoldható elemi módszerekkel is. A falra ható erő egy bizonyos pontban (1) alapján csak a pillanatnyi sebességtől függ, a golyó mozgása tehát helyettesíthető egy olyan ellipszispályán történő változó sebességű mozgással, amelynek az adott pontban a golyó sebességével azonos a sebessége. Ilyen mozgás lehet például a bolygómozgás.

Helyezzünk az ellipszis egyik gyújtópontjába egy olyan testet, amely a golyóra $F = k/r^2$ nagyságú vonzóerővel hat.



1. ábra

Az 1. ábra alapján a pálya egy P pontjában a kényszerpályát helyettesítő „műnap”

$$(2) \quad F_m = F \cdot \cos \varphi$$

nagyságú pályára merőleges erőt fejt ki. A bolygómozgás és a kényszermozgás egyenértékűségét a P pontban k alkalmas megválasztásával érhetjük el.

Kepler II. törvénye szerint a területi sebesség állandó:

$$(1/2)r \cdot v \cos \varphi = \text{áll.}$$

T keringési idő alatt a vezérsugár az egész $ab\pi$ területet sűrolja, tehát

$$(3) \quad (1/2)r \cdot v \cdot (\cos \varphi) \cdot T = ab\pi :$$

A keringési időt Kepler III. törvényének felhasználásával határozhatjuk meg. Vegyünk egy a sugarú körpályát, melynek középpontjában ugyanaz a „műnap” van. Ekkor a körpályán keringő bolygónak szintén T a keringési ideje. Newton II. törvénye szerint $F = mv^2/a$, azaz

$$(4) \quad \frac{k}{a^2} = \frac{m}{a} \left(\frac{2a\pi}{T} \right)^2.$$

Ebből

$$(5) \quad T = 2a\pi \sqrt{\frac{ma}{k}},$$

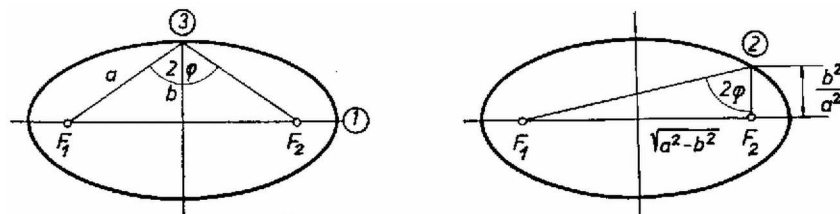
amit a (3) egyenletbe helyettesítve, k -ra a következőt kapjuk:

$$(6) \quad k = m \cdot (a/b^2)(r \cdot v \cdot \cos \varphi)^2.$$

Itt v az eredeti mozgás sebessége (ez állandó, mert nincs súrlódás), ami a φ szöggel jellemzett helyen éppen megegyezik a k állandóval megadott bolygómozgás pillanatnyi sebességével. A kapott összefüggés alapján a (2) egyenletből F_m meghatározható:

$$(7) \quad F_m = mv^2(a/b^2) \cos^3 \varphi.$$

A kérdéses három pontban ható kényszererők nagyságát $\cos \varphi$ ismeretében számíthatjuk ki (2. ábra).



2. ábra

1. Látható, hogy $\varphi = 0$; $\cos \varphi = 1$, tehát

$$F_1 = mv^2 \cdot a/b^2 = 78,1 \text{ N.}$$

2. Felhasználjuk, hogy az ellipszis vezérsugarai az érintővel azonos szöget zárnak be, tehát a vezérsugarak közötti szögfelező merőleges az érintőre.

A 2. ábra alapján

$$\cos 2\varphi = \frac{\overline{F'2}}{\overline{F'2}} = \frac{b^2/a}{(2a^2 - b^2)/a} = \frac{b^2}{2a^2 - b^2},$$
$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{a^2}{2a^2 - b^2}}.$$

Ezt a (7) egyenletbe helyettesítve:

$$F_2 = mv^2 \frac{a^4}{b^2(2a^2 - b^2)^{3/2}} = 49,3 \text{ N.}$$

3. $\cos \varphi$ értékét azonnal felírhatjuk: $\cos \varphi = b/a$, így

$$F_3 = mv^2 \cdot b/a^2 = 40,1 \text{ N.}$$

Ábrahám Tibor (Eger, Gárdonyi G. Gimn.. IV. o. t.)

Megjegyzés. A feladat megoldható úgy is, hogy az ellipszis-mozgást egy, az ellipszis középpontjába helyezett rugó segítségével hozzuk létre. Ezzel a módszerrel nem érkezett helyes megoldás, mert a megoldók nem gondoltak arra, hogy a rugóerőnek csak a pályára merőleges komponense számít.