

I. megoldás. A változó nagyságú erő hatására változó gyorsulású mozgás jön létre. Legyen a test tömege m , a mozgás kezdősebessége v_0 , végsebessége v_1 , a megtett út s , a mozgás ideje t . Az F_m átlagerő egy állandó erő, amely t idő alatt $mv_1 - mv_0$ mozgásmennyiség-változást hoz létre: $F_m \cdot t = mv_1 - mv_0$, azaz

$$(1) \quad F_m = \frac{m(v_1 - v_0)}{t}.$$

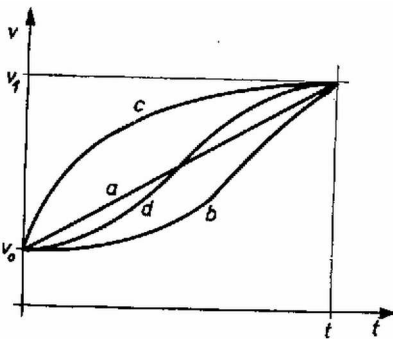
Az erő munkavégzése teljes egészében a mozgási energiát változtatja meg, így az F_e átlagerő egy állandó erő, amelynek s úton végzett munkája: $(1/2)mv_1^2 - (1/2)mv_0^2$ energiaváltozást hoz létre. $F_e \cdot s = (1/2)mv_1^2 - (1/2)mv_0^2$, azaz

$$(2) \quad F_e = \frac{m(v_1^2 - v_0^2)}{2s}.$$

Tegyük fel, hogy valamely mozgásnál F_m és F_e értéke megegyezik. Ekkor (1) és (2) alapján

$$(3) \quad \frac{s}{t} = \frac{v_0 + v_1}{2}.$$

A bal oldal az átlagsebesség (a mozgás egész útja osztva az összes idővel), a jobb oldal pedig a kezdeti és végsebesség számtani középátlósága. Olyan mozgásokra tehát, ahol a (3) egyenlet teljesül, azaz az átlagsebesség a kezdeti és végsebesség számtani középátlósával egyenlő, a kétféle módon definiált átlagerő megegyezik, más esetben különbözik. Pl. egyenletesen gyorsuló mozgásra a (3) összefüggés teljesül, ebben az esetben F_e és F_m megegyeznek egymással (és a mozgást létrehozó állandó erővel).



Az ábrán négy különböző sebesség-idő függvényt ábrázoltunk. Az a egyenes állandó gyorsulású mozgásnak felel meg. A megtett út éppen a görbe alatti terület, amely az a esetben éppen a (3) egyenletnek megfelelő $\frac{v_0 + v_1}{2} \cdot t$. A b , ill. c görbével jellemzett esetben a terület – azaz a megtett út – ennél kisebb, illetve nagyobb.

Így általában a kétféle átlagerő nem egyenlő, de állandó gyorsulású mozgás speciális esetében megegyezik. (Igaz az $F_m = F_e$ egyenlőség az ábra szerinti d görbéhez hasonló esetekben is, amikor a görbe alatti terület megegyezik az a egyenes alatti területtel.)

Balogh Mária (Aszód, Petőfi S. Gimn., II. o. t.)
és Zimányi Gergely (Bp., Fazekas M. Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján

II. megoldás. Az időben változó nagyságú erő által végrehajtott mozgásmennyiség- és energiaváltozást az

$$\int_0^t F(t) dt \quad \text{és} \quad \int_0^s F(s) ds$$

integrálokkal lehet kiszámítani.

Adjuk meg az erőt például az idő függvényében! Ekkor az $\int_0^s F(s) ds = \int_0^t F(t)v(t) dt$ átalakítást célszerű végrehajtani. A két átlagerő (1)-hez és (2)-höz hasonlóan:

$$F_m = \frac{1}{t} \int_0^t F(t) dt \quad \text{és}$$

$$F_e = \frac{1}{s} \int_0^t F(t)v(t) dt.$$

Ha a $v(t)$ függvény állandó, kiemelhető az integráljel elé, ekkor $F_e = F_m$. Egyébként általában a két kifejezés értéke különböző lesz, kivéve az ábra d görbéjéhez hasonló eseteket.

Megjegyzés. Sok megoldó példák felsorakoztatásával próbálta eldönteni a feladatban feltett kérdést. Megmutatták, hogy egyenletesen gyorsuló mozgás esetén a kétféle módon definiált átlagerő egyenlő, és speciális példát kerestek annak igazolására, hogy az egyenlőség nem általános. Két példa, amelyre a számolás egyszerű: az erő az idővel arányosan növekszik; az erő a mozgás első szakaszában állandó F_1 , a másodikban szintén állandó $F_2 \neq F_1$.

A bizonyításnak ez a formája is teljes értékű; dolgozatukra – ha az egyébként hibát nem tartalmazott – ezek a megoldók is 4 pontot kaptak.