

A rakétába préselt levegő kitágulása hirtelen megy végbe, a gáz nem tud hőt cserélni környezetével, így állapotváltozása adiabatikus. Az adiabatikus állapotváltozás során

$$(1) \quad pV^\kappa = \text{állandó},$$

ahol $\kappa = c_p/c_v > 1$. A gáz belső energiájának rovására egyrészt munkát végez a külső légnyomással szemben, másrészt felgyorsítja a rakétát és a kilökött vizet. A folyamat gyorsasága miatt a nehézségi erő szerepe kicsi, a rendszert zártnak tekinthetjük, s az impulzus, illetve energiamegmaradás tételét alkalmazzuk.

Ha a levegő nyomása épp akkor éri el a p_0 külső nyomást, amikor a teljes vízmennyiség elhagyja a rakétát, akkor

$$p(V_0 - m_2/\varrho)^\kappa = p_0 V_0^\kappa.$$

(Itt ϱ a víz sűrűségét, p a gáz kezdeti nyomását jelöli, ami a túlnyomás és a külsőnyomás összege.) Ebből a víz tömege

$$(2) \quad m_2 = m_0 \equiv \varrho V_0 \left[1 - \left(\frac{p_0}{p} \right)^{1/\kappa} \right].$$

Ha a rakétában levő víz tömege ennél az m_0 értéknél nagyobb, a külső és a belső nyomás kiegyenlítődik az összes víz kilöködése előtt: a levegő kevesebb munkát végez, mint az $m = m_0$ esetben, és a maradék vízzel is súlyosbodott rakéta kisebb sebességgel indul. Ezért elegendő az $m_2 \leq m_0$ esetet vizsgálni.

A rakéta sebességét v_1 , a vizét v_2 jelöli. Az impulzusmegmaradás miatt

$$(3) \quad m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0.$$

Induláskor a rakéta–víz–levegő rendszer összes energiája nem változik, így

$$(4) \quad \Delta E = (1/2)m_1 v_1^2 + (1/2)m_2 v_2^2 + p_0 m_2/\varrho + \Delta U = 0.$$

Itt $p_0 m_2/\varrho$ a külső légnyomással szemben végzett munka, ΔU pedig a rakétába préselt levegő belső energiájának megváltozása. A rakétából kiáramló levegő impulzusát és energiáját (a levegő kis tömege miatt) elhanyagoljuk.

A $pV = m_{\text{lev}} \cdot RT$ állapotegyenlet felhasználásával ΔU így írható:

$$(5) \quad \Delta U = c_v m_{\text{lev}} \Delta T = (c_v/R) \Delta(pV).$$

A gáz kezdeti p és végső $\bar{p}$ nyomása között az (1) összefüggés teremt kapcsolatot:

$$(6) \quad p(V_0 - m_2/\varrho)^\kappa = \bar{p} V_0^\kappa.$$

Ennek alapján ΔU végső alakja

$$(7) \quad \Delta U = \frac{c_v}{R} \left[\bar{p} V_0 - p \left(V_0 - \frac{m_2}{\varrho} \right) \right] = \frac{c_v}{R} p \left(V_0 - \frac{m_2}{\varrho} \right) \cdot \left[\left(\frac{V_0 - m_2/\varrho}{V_0} \right)^{\kappa-1} - 1 \right].$$

A (3), (4), (7) egyenletek segítségével kifejezhetjük a rakéta indulási mozgási energiáját:

$$\frac{m_1}{2} v_1^2 = \frac{m_2}{m_2 + m_1} \left\{ \frac{c_v}{R} p \left(V_0 - \frac{m_2}{\varrho} \right) \left[1 - \left(\frac{V_0 - m_2/\varrho}{V_0} \right)^{\kappa-1} \right] - \frac{p_0 m_2}{\varrho} \right\}.$$

A kapott kifejezés maximumát csak numerikusan tudjuk meghatározni. Hogy minél kevesebb állandóval kelljen dolgoznunk, bevezetjük az $x = m_2/\varrho V_0$ dimenziótlan változót. Ezzel

$$(8) \quad \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{x}{x + m_1/\varrho V_0} \left\{ \frac{c_v}{R} p V_0 (1-x) [1 - (1-x)^{\kappa-1}] - p_0 V_0 x \right\}.$$

A levegőre vonatkozó állandókat a függvénytáblázatból keressük ki:

$$c_p = 0,24 \text{ cal/g}^\circ\text{C}, \quad c_v = 0,17 \text{ cal/g}^\circ\text{C}.$$

A (8)-ban szereplő állandók értékei:

$$\frac{m_1}{\varrho V_0} = 0,44, \quad p_0 V_0 = 180 \text{ atm cm}^3, \quad R = c_p - c_v = 0,07 \text{ cal/g}^\circ\text{C},$$

$$\frac{c_v}{R} p V_0 = 1352 \text{ atm cm}^3, \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1,4,$$

E számértékeket felhasználva

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{x}{x + 0,44} (1352 - 1532x - 1352(1-x)^{1,4}) \text{ atm cm}^3.$$

Az x -változónak csak azon értékei érdekesek, amelyekre

$$x \leq \frac{m_0}{V_0 \varrho} = 1 - \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{1,4}} = 0,54.$$

x	0	0,1	0,3	0,4	0,43	0,45	0,47	0,5	0,54
$m_1 v_1^2/2$	0	6,0	29,1	37,1	38,4	39,0	39,3	39,2	37,5

Az értéktáblázat alapján a kifejezés maximuma az

$$x = 0,47(\pm 0,03)$$

helyen van. Ebből az optimális víztömeg:

$$m_2 = x \rho V_0 = 84,6 \text{ g } (\pm 5,4 \text{ g}).$$

A maximális emelkedési magasság

$$h_{\max} = v^2/2g = 5,1 \text{ m}.$$

A rakéta kezdősebessége

$$v_{\max} = 10 \text{ m/s}.$$

Természetesen x értékének pontosabb meghatározása $h_{\max}$ és $v_{\max}$ értékeit valamelyest módosítja.

Vass Albert (Debrecen, Református Gimn., III. o. t.)