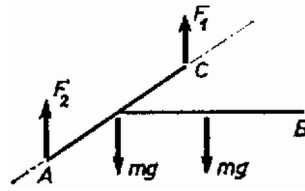


a) A kötél elégetése után az 1. ábra szerinti erők hatnak a testre.



1. ábra

A számítás egyszerűsítése érdekében a szerkezet súlypontját nem határoztuk meg, hanem az egyes rudakra ható súlyerőket külön jelöltük.

Legegyszerűbb a megoldás, ha az A , C pontokon átmenő, nyugvó tengelyre írjuk fel a forgatónyomatéki egyenletet:

$$mg \cdot l/2 = \Theta \cdot \beta,$$

ahol Θ a szerkezet tehetetlenségi nyomatéka, ami most megegyezik az l hosszúságú rúd végpontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatékkal ($\Theta = (1/3)ml^2$), β a szöggyorsulás. A szöggyorsulást innen meghatározva és az

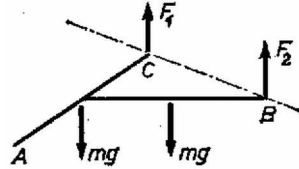
$$a_B = l \cdot \beta$$

kényszerfeltételt felhasználva kapjuk, hogy

$$a_B = (3/2)g.$$

A módszer előnye – és egyben hátránya –, hogy az F_1 és F_2 erők az egyenletekben nem szerepelnek. Így a megoldás egyszerű, de nem kapjuk meg pl. az F_1 , és az F_2 erőket. A teljes megoldást úgy kaphatjuk meg, hogy a forgatónyomatéki egyenletet a tömegközépponton áthaladó tengelyre írjuk fel, és felhasználjuk Newton II. törvényét is. Ekkor az előbbivel azonos eredményt kapunk, de a feladatban feltett kérdés megválaszolásához ez a módszer szükségtelenül bonyolult.

b) A rendszerre ható erőket a 2. ábrán tüntettük fel.

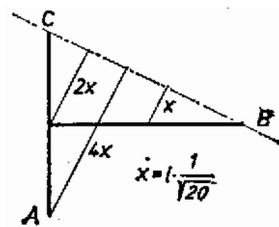


2. ábra

A BC tengelyre a forgatónyomatéki egyenlet:

$$2x \cdot mg + x \cdot mg = \Theta \cdot \beta,$$

ha x a 3. ábrán látható távolság.



3. ábra

A tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta = (1/3)m(2x)^2 + (1/3)m(4x)^2.$$

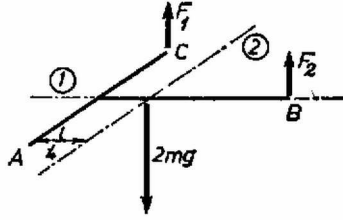
Behelyettesítve és rendezve

$$\beta = (9/20) \cdot (g/x) = (9/\sqrt{20}) \cdot (g/l),$$

az A pont gyorsulása

$$a_A = 4x \cdot \beta = (9/5) \cdot g.$$

Számoljuk most végig a feladatot az előző megoldásban említett második módszerrel is!



4. ábra

A 4. ábra szerinti ① és ② tengelyre írunk fel forgatónyomatéki egyenletet:

$$\textcircled{1} F_1 \cdot (l/2) = \Theta_1 \cdot \beta_1,$$

$$\textcircled{2} F_1 \cdot (l/4) - F_2 \cdot (3/4)l = \Theta_2 \cdot \beta_2.$$

Itt $\Theta_1, \beta_1; \Theta_2, \beta_2$ a megfelelő tengely körüli tehetetlenségi nyomaték, ill. szöggyorsulás. A Steiner-tétel felhasználásával

$$\Theta_1 = (1/12)ml^2,$$

$$\Theta_2 = [(1/12)ml^2 + m(l/4)^2] + m(l/4)^2 = (5/24)ml^2.$$

Másrészt Newton II. törvénye szerint

$$2mg - (F_1 + F_2) = m \cdot a,$$

ahol a a tömegközéppont gyorsulása. A forgatónyomatéki egyenleteken és a Newton-törvényen kívül a kényszerfeltételeket kell felírni (általában ez a legnehezebb feladat). Esetünkben

$$\beta_1(l/2) + \beta_2 \cdot (l/4) - a = a_C = 0,$$

$$\beta_2 \cdot (3/4)l + a = a_B = 0,$$

ahol tehát azt használtuk fel, hogy az A és a C pont gyorsulása a tartókötél nyújthatatlansága miatt nulla. A hét egyenletben $F_1, F_2, \beta_1, \beta_2, \Theta_1, \Theta_2$ és a az ismeretlen. Az egyenletrendszer megoldható. Végeredményben

$$a = (27/40)g,$$

$$\beta_1 = (9/5)(g/l), \quad F_1 = (3/10)mg,$$

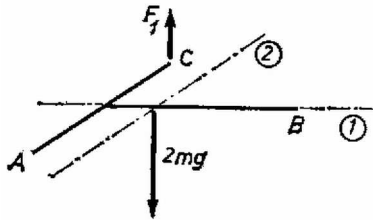
$$\beta_2 = -(9/10)(g/l), \quad F_2 = (9/40)mg.$$

Az A pont gyorsulása

$$a_A = a + \beta_1 \cdot (l/2) - \beta_2(l/4) = (9/5)g,$$

megegyezik az előbb kapott értékkel.

c) Itt csak az előző megoldásban alkalmazott második módszerrel juthatunk célba, mert nem tudjuk, hogy a C ponton áthaladó sok lehetséges tengely közül melyik az igazi pillanatnyi forgástengely. Most eggyel kevesebb ismeretlen (F_2) és eggyel kevesebb egyenlet (kényszerfeltétel) van.



5. ábra

Az 5. ábra alapján az egyenletrendszer:

$$\textcircled{1} F_1 \cdot (l/2) = \Theta_1 \cdot \beta_1, \quad \textcircled{2} F_1 \cdot (l/4) = \Theta_2 \cdot \beta_2,$$

$$2mg - F_1 = 2ma, \quad \Theta_1 = (1/12)ml^2, \quad \Theta_2 = (5/24)ml^2,$$

$$\beta_1 \cdot (l/2) + \beta_2(l/4) - a = a_C = 0.$$

A megoldás

$$a = (33/38)g, \quad \beta_1 = (30/19)(g/l), \quad \beta_2 = (6/19)(g/l),$$

és az A és B pont gyorsulása:

$$\begin{aligned}a_A &= a + \beta_1 \cdot (l/2) - \beta_2 \cdot (l/4) = (30/19)g, \\a_B &= a + \beta_2 \cdot (3/4)l = (21/19)g.\end{aligned}$$

A kapott eredményből meghatározható a pillanatnyi forgástengely iránya is, ha figyelembe vesszük, hogy az ① és ② tengely körüli β_1 és β_2 szöggyorsulás tulajdonképpen a pillanatnyi forgástengely körüli eredő szöggyorsulás két komponense. A pillanatnyi forgástengely tehát az ① tengellyel $\text{tg } \alpha = \beta_2/\beta_1 = 1/5$ szöget zár be. Meglepő, hogy ez az irány nem merőleges a súlypontot a felfüggesztési ponttal összekötő szakaszra. Ez a tény okozta, hogy a feladatnak ezt a részét egyetlen versenyzőnek sem sikerült megoldania. A nehézséget tulajdonképpen a tehetetlenségi nyomaték tenzor jellege okozza (lásd. pl. Budó Á.: Kísérleti fizika), azonban a probléma megoldható, ha szem előtt tartjuk azt az alapvető szabályt, hogy a forgatónyomatéki egyenletet a tömegközépponti tengelyekre írjuk fel.

Mihály László