

Írjuk le a golyó mozgását a csőhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben. A forgástengelytől r távolságban a testre két erő hat sugárirányban: az $m\omega^2 r$ centrifugális erő és az ellentétes irányú $D(r - r_0)$ rugóerő. Itt r_0 a rugó $t = 0$ időpontbeli (megfeszítetlen állapotbeli) hosszát, D a rugóállandót jelöli. A golyó mozgásegyenlete

$$(1) \quad ma = m\omega^2 r - D(r - r_0),$$

mely a következő alakba írható át:

$$(2) \quad a = -(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \left(r - \frac{r_0}{1 - \omega^2/\omega_0^2} \right).$$

ω_0 a szabad rezgést végző golyó körfrekvenciája ($\omega_0^2 = D/m$). A golyó gyorsulása ($\omega < \omega_0$ esetén) az

$$(3) \quad r_1 = \frac{r_0}{1 - \omega^2/\omega_0^2}$$

távolságban nulla. Ezen egyensúlyi távolság bevezetésével a test gyorsulásának (2) alatti kifejezése ilyen alakra hozható:

$$(4) \quad a = -\frac{r_0\omega_0^2}{r_1}(r - r_1).$$

A golyó gyorsulása arányos az egyensúlyi helyzettől mért $r - r_1$ kitéréssel és ezzel ellentétes irányú. Ezért a golyó a (3) alatt megadott r_1 egyensúlyi helyzet körül $\Omega = \omega_0 \sqrt{r_0/r_1} = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$ frekvenciájú harmonikus rezgőmozgást végez $A = r_1 - r_0$ amplitúdóval. Az adott numerikus értékekkel: $\omega = 8$ l/s, $\Omega = 7$ l/s, $r_1 = 40$ cm, $A = 10$ cm. Figyelembe véve, hogy a golyó a $t = 0$ időpillanatban a forgástengelytől r_0 távolságban van, azért a golyónak a forgástengelytől való r távolsága tetszőleges t időpillanatban

$$(5) \quad r = r_1 - A \cos \Omega t.$$

A test v sebessége a fent leírt harmonikus rezgőmozgásból származó v_r sebesség és a cső forgásából származó v_k kerületi sebesség eredője. (5) idő szerinti deriválásával

$$(6) \quad v_r = A\Omega \cdot \sin \Omega t,$$

a kerületi sebesség pedig

$$(7) \quad v_k = r\omega.$$

Mivel e két sebességkomponens egymásra merőleges, ezért Pitagorasz tételével számíthatjuk ki a v eredő sebességet. A v_k felírásánál vegyük figyelembe r (5) alatti kifejezését. Így

$$\begin{aligned} v^2 &= v_k^2 + v_r^2 = r^2\omega^2 + A^2\Omega^2 \cdot \sin^2 \Omega t = \\ &= (r_1\omega - A\omega \cos \Omega t)^2 + A^2\Omega^2 \sin^2 \Omega t. \end{aligned}$$

Annak eldöntése érdekében, hogy a v eredő sebesség (ill. annak négyzete) melyik időpontban maximális, differenciáljuk az idő szerint a fenti kifejezést, majd tegyük nullával egyenlővé. A maximális sebesség szempontjából szóba jöhető időpontok az

$$(8) \quad [r_1\omega^2 + (\Omega^2 - \omega^2)A \cos \Omega t] \sin \Omega t = 0$$

egyenlet gyökei. A feladat számadatai mellett az első tényező sohasem lesz nulla, ezért ez az egyenlet csak az $\Omega t = k\pi$ (k egész szám) argumentumokkal elégíthető ki. Páros k -ra az eredő sebesség minimuma, páratlan k -ra a maximuma adódik. Mindegyik szélső esetben a rezgésből eredő sebesség nulla. A golyó maximális sebessége $v_{\max} = (r_1 + A)\omega = 2$ m/s.

Schmidt József (Esztergom, Dobó K. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján