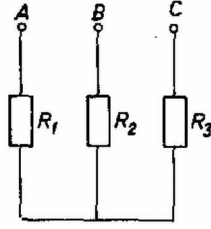
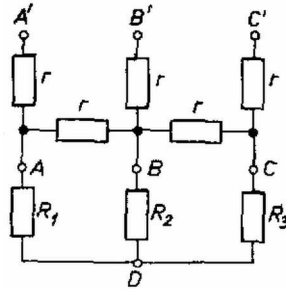


A végtelen ellenállásláncot helyettesítsük az 1. ábra szerint R_1 , R_2 , R_3 ellenállásokkal.



1. ábra

A lánc ellenállása nem változik, ha egy újabb tagot rákapcsolunk (2. ábra, $r = 1\Omega$).



2. ábra

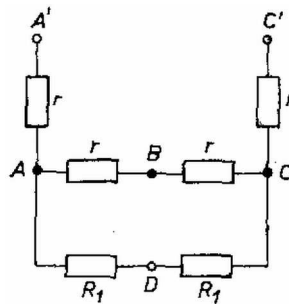
Az eredeti lánc végein mérhető ellenállások (a szimmetrikus elrendezés miatt $R_{AB} = R_{BC}$)

$$R_{AB} = R_{BC} = R_1 + R_2 = R_2 + R_3,$$

(azaz $R_1 = R_3$) és

$$R_{AC} = R_1 + R_3 = 2R_1.$$

A' és C' pontok között mérve az ellenállást látható, hogy az R_2 ellenállás két vége azonos potenciálon van (az $ABCD$ Wheatstone híd kiegyenlített, a B és D pontok azonos potenciálúak); az ellenálláslánc egész középső ágát elhagyhatjuk (3. ábra).



3. ábra

Az $R_{A'C'}$ ellenállás a fentiek érelmében egyenlő lesz az 1. ábra $R_{AC} = 2R_1$ ellenállásával:

$$R_{AC} = 2R_1 = 2r + \frac{4R_1r}{2r + 2R_1},$$

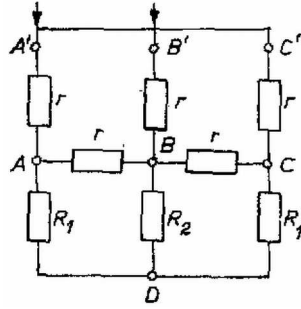
innen

$$R_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot r,$$

azaz

$$R_{AC} = (1 + \sqrt{5})r \approx 3,236\Omega.$$

Az $R_{AB} = R_{BC}$ ellenállás értékének kiszámításához kössük össze az A' és C' pontot (4. ábra).



4. ábra

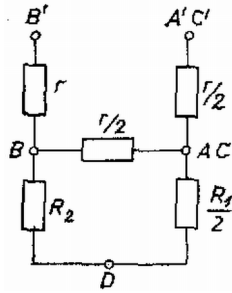
Az ábra szimmetriájából látszik, hogy nemcsak az A' és C' pontnak, hanem az A és C pontnak is megegyezik a potenciálja, így ezek összeköthetők.

Az 1. ábrán az A és C pontokat összekötve a közös AC és a B pont közötti ellenállás:

$$R_{AB} = R_{CB} = R_2 + R_1/2.$$

A $C - C'$ és $A - A'$; a $B - C$ és $B - A$; a $D - C$ és $D - A$ ellenállások párhuzamosan vannak kapcsolva (5. ábra), így az eredő ellenállás $A'C'$ és B' pontok között

$$R_{A'B'} = R_{AB} = R_2 + \frac{R_1}{2} = \frac{3}{2}r + \frac{(r/2)(R_2 + R_1/2)}{(r/2) + R_2 + (R_1/2)},$$



5. ábra

Innen

$$R_2 = \left(\frac{2 - \sqrt{5} + \sqrt{21}}{4} \right) r,$$

illetve

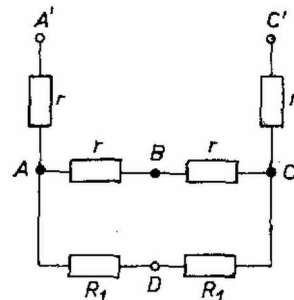
$$R_{AB} = R_1 + R_2 = \frac{4 + \sqrt{5} + \sqrt{21}}{4} \cdot r \approx 2,705\Omega.$$

Katus Gábor (Bp. Apáczai Csere J. Gyak. Gimn. III. o. t.)

*Megjegyzések.*1. Az R_{BC} ellenállás kiszámítható az ellenálláslánc fenti „összehajtása” nélkül is.

A lánc helyettesítő képe egy újabb tag hozzákapcsolásával (ekkor a $A' - A$ ellenállás elhagyható) a 6. ábra szerint:

$$R_{B'C'} = R_1 + R_2 = 2r + \frac{1}{\frac{1}{r} + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + r}}}}$$



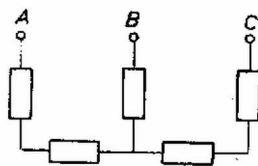
Innen, felhasználva, hogy $R_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} r$:

$$R_2 = r \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4(\sqrt{5} + 3)} + \frac{1}{2(\sqrt{5} + 3)} \cdot \sqrt{\frac{63\sqrt{5} + 147}{2}} \right), \quad R_{AB} = R_{BC} = R_1 + R_2 = 2,705\Omega.$$

2. Nagyon sok megoldó – hibásan – R_{BC} számolásakor eltekintett a A pont alatti teljes szélső ágtól, és így R_{AB} -re $(1 + \sqrt{3})r$ értéket kapott, ami ugyan számértékileg csak kissé tér el a helyes eredménytől, de a 6. ábrára tekintve látszik, hogy nyilvánvalóan hibás.

3. A megoldásban abból indultunk ki, hogy a végtelen ellenállásláncot az 1. ábra szerint három ellenállással helyettesíthetjük. Egy tetszőleges, csak ellenállásokból felépített kapcsolás viselkedését (még ha az végtelen sok ellenállásból áll is) az Ohm törvény írja le. Azaz pl. kétpólus esetén (amikor a kapcsolás két pontja van kijelölve) a két pontra kapcsolt feszültség és a létrejövő áram hányadosa állandó, az állandó az az ellenállásérték, amely minden szempontból úgy viselkedik, mint az eredeti kétpólus. Tetszőleges, csak ohmos ellenállásokból álló kétpólus így egyetlen ellenállással helyettesíthető. Hasonlóan járhatunk el ebben a feladatban, ahol hárompólust kell helyettesítenünk. A három kijelölt pont közül (A , B , C) bármelyik kettőt mint kétpólus pontjait tekintve egy-egy ellenállással helyettesíthetjük (R_{AB} , R_{AC} , R_{BC}), ami három független ellenállásértéket jelent. Az eredeti kapcsolás legegyszerűbb helyettesítése így az 1. ábra szerinti elrendezés, amely minden szempontból ugyanúgy viselkedik, mint a végtelen ellenálláslánc, ha csak az A , B és C pontokat vizsgáljuk.

4. Végtelen hosszú ellenálláslánc ellenállásán a következőt értjük. Jelöljük a 7. ábrán látható n db elemet tartalmazó véges lánc ellenállását pl. A és B között R_{AB}^n -vel.



7. ábra

Ekkor R_{AB} -n az R_{AB}^n sorozat határértékét értjük, $n \rightarrow \infty$ esetén. Nem nehéz megmutatni, hogy esetünkben valóban van az R_{AB}^n sorozatnak határértéke, tehát valóban beszélhetünk az A és B közötti ellenállásról. Hasonlóképpen beszélhetünk R_{BC} -ről és R_{AC} -ről. Ezeket a fenti megoldásunkban hallgatóláncos feltételeztük.