



Az ábrán látható jelöléseket használva ($\Theta = (1/2)mr^2$ a henger tehetetlenségi nyomatéka) a mozgásegyenletek a következők:

$$(1) \quad m_1 a_1 = m_1 g \sin \alpha - S_1,$$

$$(2) \quad 0 = m_1 g \cos \alpha - N_1,$$

$$(3) \quad \Theta \beta = S_1 \cdot r,$$

$$(4) \quad m_2 a_2 = m_2 g \sin \alpha - S_2 + S_1,$$

$$(5) \quad 0 = m_2 g \cos \alpha - N_2 + N_1.$$

Tegyük fel, hogy mindkét érintkezésnél a felületek csúsznak egymáson. A súrlódási erők:

$$(6a) \quad S_1 = \mu N_1,$$

$$(7a) \quad S_2 = \mu N_2.$$

Az egyenletrendszert megoldva, a gyorsulásokra

$$a_1 = a_2 = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

adódik. Ez ellentmond feltételezésünknek, hiszen ekkor – nyugalmi helyzetből való indulást feltételezve – a henger és a deszka egymáshoz képest nem csúszhatnak.

A felületek így az egyik, másik vagy mindkét érintkezési helyen összetapadnak. Tegyük fel, hogy csak a deszka csúszik meg a lejtőn, a henger tapad a deszkához. A (6a) egyenlet ekkor érvényét veszti (az $S_1 \leq \mu N_1$, egyenlőtlenség érvényes), helyette a tapadást kifejező kényszeregyenlet teljesül:

$$(6b) \quad r\beta = a_1 - a_2.$$

Az egyenletrendszerből (amely az (1), (2), (3), (4), (5), (6b), (7a) egyenletekből áll) a_2 értékét kifejezve negatív eredményt kapunk. Így ez a feltevés sem helytálló.

Ha a deszka tapad a lejtőhöz, a (7a) egyenlet helyett az

$$(7b) \quad a_2 = 0$$

egyenlet érvényes. Feltételezve, hogy a henger viszont csúszva gurul lefelé, az (1), (2), (3), (4), (5), (6a), (7b) egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$a_1 = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \quad \text{és} \quad \beta = \frac{2\mu g \cos \alpha}{r}.$$

Feladatunk számadataival a csúszás feltétele, az $a_1 \geq r \cdot \beta$ egyenlőtlenség nem teljesül, így csak az a lehetőség marad, hogy a deszka nyugalomban marad, a henger pedig csúszásmentesen gördül a deszkán. A (6b) kényszeregyenletet figyelembe véve a megoldás:

$$a_1 = (2/3)g \sin \alpha \approx 1,08 \text{ m/s}^2, \quad \beta = (2/3)(g/r) \sin \alpha = 13,5 \text{ l/s}^2$$

Megjegyzés. A súrlódási határszög a feladatban adott $\mu = 0,14$ súrlódási együttható érték esetén $7^\circ 58'$, kisebb, mint a lejtő hajlásszöge. A lejtőre helyezett deszka tehát lecsúszna róla. Amíg azonban a henger gördül a deszkán, a deszka nyugalomban marad.

Ha a deszka nyugalomban marad és a henger tisztán gördül, akkor a következő összefüggéseknek kell teljesülniük:

$$S_1 \leq \mu m_1 g \cos \alpha, \quad S_2 \leq \mu(m_1 + m_2)g \cos \alpha, \quad a_2 = 0, \quad a_1 = r\beta.$$

Ezek, valamint az (1), (2), (3), (4), (5) mozgásegyenletek felhasználásával $\operatorname{tg} \alpha$ -ra a következő megszorítást kapjuk:

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \mu \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{1 + \frac{m_1 r^2}{\theta}} + m_2},$$

azaz a $7^\circ 58' < \alpha < 10^\circ 15'$ szögtartományban lehetséges az, hogy a deszka nem csúszik meg mindaddig, amíg a henger rajta gördül. Könnyen belátható, hogy az egész szögtartományban valóban ez történik. Ha a lejtő hajlásszöge $7^\circ 58'$ -nél kisebb, a deszka önmagában sem csúszik meg, ha pedig $10^\circ 15'$ -nél nagyobb, a rajta gördülő henger ellenére is megcsúszik.

Karlócai Péter (Bp., Piarista Gimn., III. o. t.)
Végh Endre (Bonyhád, Petőfi S. Gimn., III. o. t.)