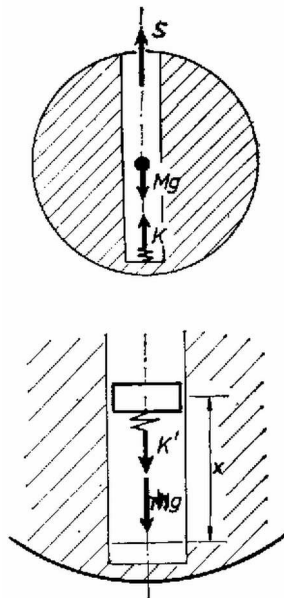


Rajzoljuk fel az egyes testekre ható erőket! K a rugó által a golyóra kifejtett erő, Mg a golyóra ható nehézségi erő, S a közegellenállási erő, melynek támadáspontját nem ismerjük, de tudjuk, hogy hatásvonala a golyó középpontján áthaladó függőlegesen egyenes. K' az m tömegre ható rugóerő, mg a nehézségi erő.



Ha A -val jelöljük a M , a -val a m tömeg gyorsulását, és a függőlegesen lefelé mutató erőket tekintjük pozitívnak, akkor a mozgásegyenletek:

$$(1) \quad MA = Mg - K - S,$$

$$(2) \quad ma = K' + mg,$$

ahol – ha a rugó tömege elhanyagolható – akkor

$$(3) \quad K = K' = D \cdot \Delta x,$$

$$(4) \quad \Delta x = x - x_0.$$

Δx -szel jelöltük a rugó hosszának megváltozását ahhoz az x_0 helyzethez képest, amikor nem hatott benne erő. A közegellenállási erő

$$(5) \quad S = \kappa \cdot R^2 \pi \cdot \varrho \cdot v^2 = C \cdot v^2.$$

Itt κ az alaki tényező, ϱ a levegő sűrűsége, és v a golyó sebessége.

Legyen

$$(6) \quad a' = a - A,$$

azaz a m tömegnek a golyóhoz viszonyított gyorsulása. A (3), (4), (6) egyenletek felhasználásával (1), (2)-ből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} MA &= Mg - D \cdot \Delta x - Cv^2, \\ m(a' + A) &= D\Delta x + mg, \end{aligned}$$

ahonnan

$$m[a' + g - (D/M) \cdot \Delta x - (C/M)v^2] = D\Delta x + mg.$$

Átrendezve:

$$ma' = D \cdot \Delta x + (m/M) \cdot D \cdot \Delta x + (m/M) \cdot C \cdot v^2,$$

a m tömeg mozgásegyenlete, melyben paraméterként szerepel a golyó sebessége.

A mozgásegyenlet megoldása időben lassan változó v esetén harmonikus rezgőmozgás, melynek x' egyensúlyi helyzetét az $a' = 0$ feltétel határozza meg. A (4) egyenlet felhasználásával

$$x' = x_0 + \Delta x' = x_0 - \frac{(m/M) \cdot C \cdot v^2}{D(1 + m/M)}.$$

A golyó sebességének növekedtével tehát az egyensúlyi helyzet lefelé tolódik el. Számadatainkkal az egyensúlyi helyzet eltolódása:

$$\begin{aligned}\Delta x' &= -\frac{0,1 \text{ kg}}{10 \text{ kg}} \cdot 0,25 \text{ m}^2 \cdot 3,14 \cdot 1,29(\text{kg/m}^3) \cdot 0,47 \cdot \frac{1}{98,1 \text{ N/m}} v^2 = \\ &= -4,85 \cdot 10^{-5} (\text{s}^2/\text{m}) v^2.\end{aligned}$$

Itt $\kappa = 0,7$, $\varrho = 1,29 \text{ kg/m}^3$ értékeket használtunk.

Külön feladat lehet v időfüggését vizsgálni; ehhez az (1) egyenletet kell megoldani. $m \ll M$ felhasználásával bebizonyítható, hogy egy közegellenállással fékezett golyó mozgását kell meghatározni, és az m tömeg hatásától eltekinthetünk. A sebességnégyzettel arányos erő miatt még ez az egyszerűbb feladat is csak közelítőleg oldható meg. Bizonyos, hogy a sebesség a $v = 0$ -ról $v = \sqrt{mg/C}$ -re növekszik, miközben tehát a rezgőmozgás egyensúlyi helyzete egyre lejjebb kerül.

Kovács Imre (Kaposvár, Ált. Gépipari Szakközépisk., IV. o. t.)