

A feladatot legkönnyebben az energiamegmaradás tétele segítségével oldhatjuk meg. Először azt kell meghatároznunk, hogy mennyivel változik meg két – egyaránt e töltésű – test potenciális energiája, ha r -től R -re növekszik távolságuk. Mivel a köztük ható Coulomb-erő x távolságnál

$$f(x) = ke^2/x^2,$$

ezért az energiaváltozás – amely a végzett munkával egyenlő:

$$W = \int_r^R f(x) dx = ke^2 \int_r^R (1/x^2) dx = ke^2(1/r - 1/R).$$

Ha a testek nagyon messze kerülnek egymástól ($R \gg r$), akkor $1/R$ elhanyagolható $1/r$ mellett, és így a potenciális energia megváltozása ke^2/r .

Ha a fenti levezetést közvetlenül alkalmazzuk feladatunkra, akkor csak annyit állíthatunk, hogy a négy töltés kezdeti

$$4ke^2/a + 2ke^2/\sqrt{2}a$$

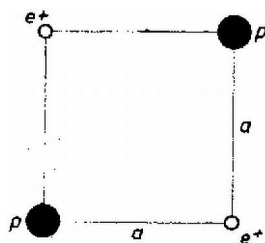
potenciális energiája megegyezik a mozgási energiájukkal, mikor már nagyon eltávolodnak egymástól. Ha v -vel jelöljük a pozitronok, u -val pedig a protonok sebességét a végtelenben, akkor a

$$\frac{ke^2}{a}(4 + \sqrt{2}) = 2 \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mu^2 \right)$$

összefüggés csak a mozgási energiák összegét adja meg, de nem mondja meg, hogy milyen arányban osztoznak az egyes részecskék ebből az energiából.

Használjuk ki, hogy a proton tömege sokkal nagyobb a pozitron tömegénél ($M \gg m$)! Mivel kezdetben azonos erők hatnak valamennyi részecskére, ezért a protonok kb. 2000-szer kisebb gyorsulással mozognak, mint a pozitronok. Van egy olyan időpont, amikor a pozitronok már lényegesen eltávolodtak egymástól ($r \gg a$), de a protonok még alig mozdultak meg ($\Delta s \ll a$). Hogy a nagyságrendeket – és így a közelítés pontosságát – megbecsülhessük, tételizzük fel egy pillanatra, hogy a testek a kezdeti gyorsulással mozognak egy ideig (természetesen ez nem igaz, hiszen ahogy távolodnak, a köztük ható erő csökken, de a nagyságrendi becslést ez nem rontja el). Ekkor az azonos idők alatt a megtett utak a tömegekkel fordítottan arányosak. Mialatt a pozitronok $50a$ utat tesznek meg, azalatt a protonok ennek csak $1/2000$ -szeresét, vagyis $(1/40)a$ -t. Az $50a$ elég nagy ahhoz, hogy a -hoz képest „végtelen”-nek tekintsük (legalább 10% pontossáig), az $(1/40)a$ pedig elég kicsi ahhoz, hogy a mellett elhanyagoljuk, vagyis úgy vegyük, mintha a proton meg sem mozdult volna (megint csak 10%-nál kisebb hibát vétünk). Ha tovább várunk, a pozitronok lényegében változatlan sebességgel repülnek tovább, a protonok pedig lassan megindulnak, de mozgásuk a pozitronokra már egyáltalán nincs hatással.

A tényleges számításban két esetet kell megkülönböztetnünk.



1. ábra

Ha az egyforma típusú részecskék a négyzet átlói mentén helyezkednek el (1. ábra), akkor az energiatétel a két egymásutáni lépésben:

$$4ke^2/a + ke^2/\sqrt{2}a = 2 \cdot (1/2)mv^2,$$

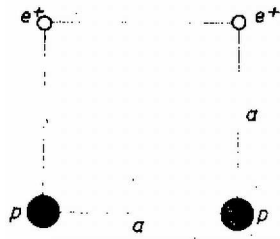
$$ke^2/\sqrt{2}a = 2 \cdot (1/2)Mu^2$$

alakú, ahonnan

$$v = \sqrt{\frac{ke^2}{2ma}(4\sqrt{2} + 1)} \quad \text{és} \quad u = \sqrt{\frac{ke^2}{2Ma}}.$$

A sebességek aránya:

$$\frac{u}{v} = \sqrt{\frac{m}{M} \frac{1}{4\sqrt{2} + 1}} \approx 0,007.$$



2. ábra

Amennyiben a protonok kezdetben a négyzet azonos oldalélének végpontjain voltak (2. ábra), úgy a következő összefüggéseket írhatjuk fel:

$$3k \frac{e^2}{a} + 2 \frac{e^2}{\sqrt{2}a} = 2 \frac{1}{2} m v^2,$$

$$k \frac{e^2}{a} = 2 \cdot \frac{1}{2} M u^2,$$

ahonnan

$$\frac{u}{v} = \sqrt{\frac{m}{M} \frac{1}{3 + \sqrt{2}}} \approx 0,01.$$

Meszéna Géza (Bp., Berzsényi D. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. A legtöbb versenyző azt a hibás feltevést tette, hogy a protonok és pozitronok egyenlő arányban osztozkodnak a kezdeti potenciális energián és így a sebességek arányára $\sqrt{m/M} \approx 0,02$ értéket kaptak. Ezt a feltevést csak valamilyen részecskénként érvényes energiatétellel lehetne alátámasztani, ilyen viszont nem létezik. Az energiamegmaradás tétele csak a rendszer teljes energiájára ad összefüggéseket.